

جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
والتعليم الفنى
الادارة المركزية لشئون الكتب

الإحصـــاء و الاقتصاد

الصف الثالث الثانوي



٢٠١٩ - ٢٠٢٠

كتاب الطالب

الاســـم : ....

الفــصل : ....

المدرســة : ....

تأليف

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د/ أحمد كامل الخولي

مراجعة

أ/ سمير محمد سعداوى

أ/ فتحى أحمد شحاته

الطبعــة الأولى ٢٠١٦/ ٢٠١٧

رقم الإيـــداع ٨٧٠١/ ٢٠١٦

الرقــم الدولى 5 - 029 - 706 - 977 - 978



المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

١ تنمية وحدة المعرفة وتكاملها فى الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.

٢ تزويد المتعلم بما هو وظيفى من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.

٣ تبنّى مدخل المعايير القومية للتعليم فى مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:

أ) تحديد ما ينبغى على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.

ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلى:

أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محبًّا للرياضيات ومبادرًا بدراستها - أن يكون المتعلم قادرًا على العمل منفردًا أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطًا ومثابرًا ومواظبًا ومبتكرًا - أن يكون المتعلم قادرًا على التواصل بلغة الرياضيات.

٤ اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).

٥ اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.

٦ احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

الوحدة الأولى: الارتباط والانحدار

١ - ١ الارتباط ٤

١ - ٢ الانحدار ١٦

ملخص الوحدة ٢٦

تمارين عامة ٢٧

اختبار تراكمي ٢٩

الوحدة الثانية: الاحتمال الشرطي

٢ - ١ الاحتمال الشرطي ٣٢

٢ - ٢ الأحداث المستقلة ٤١

ملخص الوحدة ٤٨

تمارين عامة ٤٩

اختبار تراكمي ٥١

المحتويات

الوحدة الثالثة: المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

٣ - ١ المتغير العشوائي المتقطع ٥٤

٣ - ٢ التوقع(الوسط) والتباين للمتغير العشوائى المتقطع ٦١

٣ - ٣ دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى المتصل ٦٨

ملخص الوحدة ٧٣

تمارين عامة ٧٥

اختبار تراكمى ٧٧

الوحدة الرابعة: التوزيع الطبيعى

٤ - ١ التوزيع الطبيعى ٨٠

٤ - ٢ بعض التطبيقات العملية للتوزيع الطبيعى ٩٤

ملخص الوحدة ١٠٠

تمارين عامة ١٠١

اختبار تراكمى ١٠٣

اختبارات عامة ١٠٥

الوحدة ١

الارتباط والانحدار

Correlation and Regression



مقدمة الوحدة

الإحصاء (Statistics) هو أحد فروع الرياضيات المهمة ذات التطبيقات المتعددة حيث تهتم بجمع وتمثيل البيانات واختزالها فى صورة مؤشرات رقمية لوصف وقياس ملامحها الأساسية وتحليلها؛ بغرض اتخاذ القرارات المناسبة لما لها من أهمية تطبيقية واسعة فى شتى مجالات العلوم الفيزيائية والإنسانية والاقتصادية والاجتماعية وغيرها.

وتهتم هذه الوحدة بتحليل البيانات ذات المتغيرين وبدراسة درجة واتجاه العلاقة بين المتغيرين وشكل هذه العلاقة، فتهتم فى البداية بدراسة الارتباط (correlation) الذى يكشف عن درجة وقوة العلاقة بين متغيرين وقد تتخذ هذه العلاقة الشكل طرديًّا أو عكسيًّا، ومن الجدير بالذكر أن الارتباط يدرس العلاقة واتجاهها بين متغير وآخر، إلا انه يجب أن ندرك بأن هذه العلاقة لا تدل على السببية أو العلية، فهى لا تدل على وجود أثر لمتغير على آخر كما سيتضح من خلال الدرس الأول فى هذه الوحدة، كما تتناول هذه الوحدة أيضا دراسة الانحدار الخطى البسيط (Linear regression) الذى يهتم بتقدير شكل هذه العلاقة والذى يمكن من خلاله التنبؤ بقيمة المتغير التابع إذا علمنا قيمة المتغير المستقل، وتزداد دقته كلما كانت العينة مختارة بشكل عشوائى، وسوف نتناول فى هذه الوحدة بعض التقنيات الحديثة من آلات حاسبة علمية وبرامج إحصائية للحاسوب (مثل برنامج SPSS) فى إجراء الحسابات والقيام بالرسوم البيانية الخاصة بالارتباط والانحدار الخطى بين ظاهرتين.

أهداف الوحدة



فى نهاية الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف معنى الارتباط بين متغيرين.
- يحسب معامل الارتباط بين متغيرين بطرق مختلفة (طريقة بيرسون - طريقة سبيرمان) ويفسر معناها رياضيًّا.
- يفهم معنى خط الانحدار، ويقدر أهميته فى دراسة العلاقة بين متغيرين.
- يمثل العلاقة بين متغيرين فى مستوى كارتيزى، ويحكم من خلالها على وجود وقوة العلاقة.
- يتعرف معنى معامل الانحدار الخطى ويفسر ما يمكن أن يستدل عليه بمعرفة قيمة هذا المعامل.
- يُوجِد معادلة خط انحدار أى من المتغيرين على الآخر بطريقة المربعات الصغرى.
- يستخدم الآلة الحاسبة والحاسوب فى إجراء العمليات الحسابية والقيام بالرسوم البيانية الخاصة بكل من الارتباط والانحدار الخطى بين ظاهرتين.
- يستخدم معادلة خط انحدار معطاة فى التنبؤ بقيمة أحد المتغيرين بمعلومية القيمة المناظرة للمتغير الآخر.
- يطبق الارتباط والانحدار الخطى فى مواقف بحثية.
- يقدر إسهامات استخدام الارتباط والانحدار الخطى فى حل مشكلات حياتية ومجتمعية.



المصطلحات الأساسية

- الارتباط Correlation
- الانحدار Regression
- الارتباط الخطي Linear Correlation
- معامل الارتباط Correlation Coefficient
- ارتباط طردى Direct Correlation
- ارتباط عكسى Inverse Correlation
- شكل الانتشار Scatter diagram
- معامل ارتباط بيرسون Pearson Correlation Coefficient
- معامل ارتباط سبيرمان Spearman Correlation Coefficient
- خط الانحدار Regression Line
- المربعات الصغرى Least Square

دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): الارتباط.

الدرس (١ - ٢): الانحدار.

الأدوات والوسائل



آلة حاسبة علمية - برنامج الإكسيل - برنامج spss

مخطط تنظيمي للوحدة

الارتباط والانحدار

- الارتباط
  - شكل الانتشار
  - أنواع الارتباط
    - منعدم
    - طردى
    - عكسى
  - معامل الارتباط
    - طريقة بيرسون
    - طريقة سبيرمان
- الانحدار
  - شكل الانتشار
  - خط الانحدار
    - طريقة المربعات الصغرى
    - معادلة خط الانحدار

الوحدة الأولى

١ - ١

الارتباط

Correlation

سوف تتعلم

- تعريف الارتباط
- شكل الانتشار
- الارتباط الطردى والارتباط العكسى
- معامل الارتباط الخطى
- معامل الارتباط الخطى لبيرسون
- معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

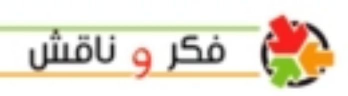
المصطلحات الأساسية

- الارتباط Correlation
- الارتباط الخطي Linear Correlation
- معامل الارتباط Correlation Coefficient
- ارتباط طردى Direct Correlation
- ارتباط عكسى Inverse Correlation
- شكل الانتشار Scatter diagram
- معامل ارتباط بيرسون Pearson Correlation Coefficient
- معامل ارتباط سبيرمان (الرتب) spearman`s coefficient correltion

مقدمة:

سبق أن درست فى الإحصاء كيفية وصف مجموعة من البيانات التى تمثل ظاهرة وذلك باستخدام بعض المقاييس الإحصائية مثل مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت ومعامل الاختلاف، وفى هذا الدرس سوف تدرس كيفية وصف مفردات ظاهرتين مختلفتين من حيث العلاقة بينهما، بمعنى إذا تغير أحد المتغيرين فى اتجاه معين (بالزيادة أو النقصان) فإن المتغير الآخر يميل إلى التغير فى اتجاه معين أيضًا بالزيادة أو النقصان، ويُسمى الارتباط فى هذه الحالة ارتباطًا طرديًا، وإذا تغير أحد المتغيرين نحو الزيادة اتجه الآخر نحو النقصان، والعكس صحيح، ويُسمى الارتباط فى هذه الحالة ارتباطًا عكسيًا.

الارتباط:



تأمل الأمثلة الآتية ودون ملاحظاتك عليها:

١- العلاقة بين طول ضلع المربع ومساحته.

٢- العلاقة بين الإصابة بضغط الدم والعمر.

٣- زيادة سعر الوحدة من سلعة ما ومدى الطلب على شرائها.

٤- انخفاض درجة الحرارة ومدى الطلب على استهلاك الوقود.

٥- العلاقة بين الارتفاع عن سطح البحر وارتفاع درجة الحرارة.

نلاحظ من الأمثلة السابقة أن:

- المتغيرين المرتبطين يتغيران بنفس الاتجاه، أى إن زيادة أو نقصان أحدهما يؤدى إلى زيادة أو نقصان الآخر كما فى الأمثلة ١، ٢، ٣ ويقال إن الارتباط بينهما موجب (طردى).

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية.

نلاحظ فى المثالين (٤)، (٥) أن المتغيرين المرتبطين يتغيران باتجاه مُعاكِس، فالزيادة أو النقصان فى أحدهما تؤدى إلى نقصان أو زيادة فى الآخر، عندئذ يقال إن الارتباط بينهما سالب (عكسى).

> **تعريف** الارتباط هو طريقة إحصائية يمكن من خلالها تحديد درجة ونوع العلاقة بين متغيرين.

والعلاقة بين متغيرين تتراوح من الدرجة القوية إلى الدرجة الضعيفة، فعندما تكون العلاقة قوية فإن ذلك يعنى أن معرفة قيمة أحد المتغيرين يساعد فى التنبؤ بقيمة المتغير الآخر، وعندما تكون العلاقة ضعيفة فإن ذلك يعنى أن معرفة أحد المتغيرين لا يساعد فى التنبؤ بقيمة المتغير الآخر.
أن إحدى الطرق المهمة التى تساعدنا على التعرف على درجة العلاقة ونوعها بين متغيرين هى تحديد شكل الانتشار.

شكل الانتشار: *Scatter diagram*

> **تعريف** شكل الانتشار هو تمثيل بيانى لعدد من الأزواج المرتبة (س، ص) لوصف العلاقة بين متغيرين.

إذا رمزنا للظاهرة الأولى بالرمز (س) والظاهرة الثانية بالرمز (ص) فإن الأشكال التالية توضح العلاقة بين س، ص. والتي توضح شكل الانتشار



شكل (١) لا يوجد ارتباط — شكل (٢) يوجد ارتباط خطى عكسى — شكل (٣) يوجد ارتباط خطى طردى

الارتباط الخطي: *Linear Correlation*

> **تعريف** يعرف الارتباط الخطي البسيط بأنه مقياس لدرجة العلاقة بين متغيرين.



نشاط

ارسم شكل الانتشار لكل من البيانات الآتية ثم اذكر نوع العلاقة التى تعبر عن تلك البيانات.

(١)

س	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
ص	١٣	١٤	١٧	١٨	٢١	٢٣

(٢)

س	٣	٤	٧	٨	١١	١٥
ص	٢٣	٢٢	٢٠	١٨	١٧	١٦

(٣)

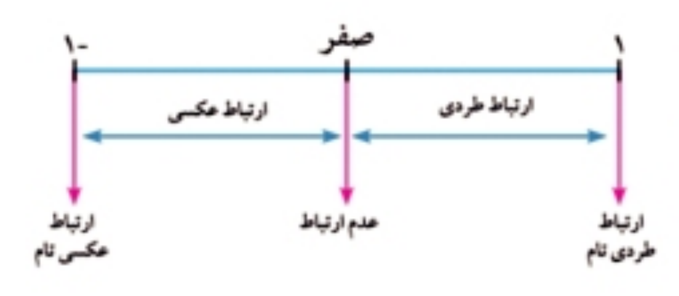
س	٧	٩	١١	١٣	١٥	١٦
ص	١٤	٧	٢٠	٦	١٢	١٠

معامل الارتباط *Correlation Coefficient*

معامل الارتباط يرمز له بالرمز (ر) وهو عبارة عن مقياس كمى نسبى يقيس قوة الارتباط بين متغيرين حيث -١ ≥ ر ≥ ١، ويقال إن الارتباط **طردى تام** إذا كان معامل الارتباط ر = ١، ويقال إن **الارتباط عكسى** تام إذا كان معامل الارتباط ر = -١، وينعدم الارتباط عندما ر = ٠

ونلاحظ أن:

كلما اقتربت قيمة معامل الارتباط من العدد ١ كان الارتباط الطردى بين المتغيرين قويًا، وكلما اقتربت قيمته إلى الصفر كان الارتباط الطردى ضعيفًا، وينطبق نفس القول على الارتباط العكسى. والشكل المجاور يوضح ذلك.



تعبير شفهى: اختيار من متعدد:

معامل الارتباط الطردى الأقوى فيما يلى هو:

(أ) -٠,٨ (ب) -٠,٥ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٧

معامل ارتباط بيرسون *Pearson Correlation coefficient*

نفرض لدينا مجموعة مكونة من (ن) فردًا وحصلنا من هؤلاء الأفراد على بيانات عن قيم متغيرين س، ص فتكون البيانات أن التى لدينا على الصورة:

قيمة المتغير الأول س: $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، .... ، $س_ن$

قيمة المتغير الثانى ص: $ص_1$ ، $ص_2$ ، $ص_3$ ، .... ، $ص_ن$

إذا رمزنا لمعامل الارتباط بالرمز (ر)، فان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص أو معامل الارتباط الخطى يمكن إيجاده من العلاقة:

$$ر = \frac{ن \sum س ص - (\sum س \times \sum ص)}{\sqrt{ن \sum س^2 - (\sum س)^2}\ \sqrt{ن \sum ص^2 - (\sum ص)^2}}$$

حيث: "$\sum$" رمز التجميع وتقرأ مجموع.

ن ترمز الى عدد المفردات ،

$\sum س = س_1 + س_2 + س_3 ...... + س_ن$ ،

$\sum ص = ص_1 + ص_2 + ص_3 ...... + ص_ن$ ،

$\sum س ص = س_1 ص_1 + س_2 ص_2 + س_3 ص_3 ...... + س_ن ص_ن$

$\sum س^2 = س_1^2 + س_2^2 + س_3^2 ...... + س_ن^2$ ،

$\sum ص^2 = ص_1^2 + ص_2^2 + ص_3^2 ...... + ص_ن^2$

مثال

① الجدول التالى يبين الدرجات التى حصل عليها عشرة طلاب فى مادتى التاريخ والجغرافيا:

التاريخ س	٧٥	٨٠	٩٣	٦٥	٨٧	٧١	٩٨	٦٩	٨٤	٧٨
الجغرافيا ص	٨٢	٧٨	٨٦	٧٢	٩١	٨٠	٩٥	٧٣	٨٩	٧٤

والمطلوب حساب معامل ارتباط بيرسون بين س، ص وتحديد نوع الارتباط.

الحل

نُكوِّن الجدول التالى:

س	ص	$س^٢$	$ص^٢$	س ص
٧٥	٨٢	٥٦٢٥	٦٧٢٤	٦١٥٠
٨٠	٧٨	٦٤٠٠	٦٠٨٤	٦٢٤٠
٩٣	٨٦	٨٦٤٩	٧٣٩٦	٧٩٩٨
٦٥	٧٢	٤٢٢٥	٥١٨٤	٤٦٨٠
٨٧	٩١	٧٥٦٩	٨٢٨١	٧٩١٧
٧١	٨٠	٥٠٤١	٦٤٠٠	٥٦٨٠
٩٨	٩٥	٩٦٠٤	٩٠٢٥	٩٣١٠
٦٩	٧٣	٤٧٦١	٥٣٢٩	٥٠٣٧
٨٤	٨٩	٧٠٥٦	٧٩٢١	٧٤٧٦
٧٨	٧٤	٦٠٨٤	٥٤٧٦	٥٧٧٢
مجـ س = ٨٠٠	مجـ ص = ٨٢٠	مجـ $س^٢$ = ٦٥٠١٤	مجـ $ص^٢$ = ٦٧٨٢٠	مجـ س ص = ٦٦٢٦٠

$$\therefore ر = \frac{ن \sum س ص - (\sum س \times \sum ص)}{\sqrt{ن \sum س^٢ - (\sum س)^٢}\ \sqrt{ن \sum ص^٢ - (\sum ص)^٢}}$$

$$\therefore ر = \frac{١٠ \times ٦٦٢٦٠ - (٨٠٠ \times ٨٢٠)}{\sqrt{١٠ \times ٦٥٠١٤ - (٨٠٠)^٢}\ \sqrt{١٠ \times ٦٧٨٢٠ - (٨٢٠)^٢}} = ٠,٨٦٠٦$$

$$= \frac{٦٠٠٦}{\sqrt{١٠١٤٠}\ \sqrt{٥٨٠٠}} \simeq ٠,٨٦٠٦$$

والارتباط طردى .

حاول أن تحل

① من بيانات الجدول الآتى:

س	٢٠	٢٢	٢٤	٢٥	٢٨	٣٠
ص	٣٥	٣١	٣٠	٢٧	٢٩	٢٨

احسب معامل ارتباط بيرسون " الخطى" بين س، ص وحدد نوعه.

استخدام الآلة الحاسبة العلمية:

تدعم الكثير من الآلات الحاسبة العلمية الموجودة بالأسواق إيجاد نواتج الأعمدة الموجودة فى الجدول السابق وحساب معامل الارتباط كالآتى:

- **تهيئة الآلة الحاسبة لنظام الإحصاء:**

وذلك بالضغط على: MODE ثم 3

Statistical and regression calculations	MODE 3 (STAT)

نختار من القائمة المنسدلة:

Paired-variable (X, Y), linear regression (y = A + Bx)	2 (A+BX)

- **إدخال البيانات:**

نملأ الجدول المبين بالشكل لجميع قيم (x ،y) وذلك بكتابة العدد الموجود فى جدول = وبعد الانتهاء من كتابته نضغط حتى الانتهاء من كتابة جميع قيم (x ،y)

MODE 3 (STAT) 2 (A+BX)

- **استدعاء النواتج:**

نضغط على المفاتيح: (STAT) 1 SHIFT فتعطى منها: 3:sum

ونختار من هذه القائمة كلًا من:

$1:\Sigma x^2$ ، $2:\Sigma x$ ، $3:\Sigma y^2$ ، $4:\Sigma y$ ، $5:\Sigma xy$

وذلك بالضغط على المفاتيح من ١ إلى ٥ كل على حدة.

لإيجاد معامل الارتباط (ر) نضغط المفاتيح التالية:

(STAT) ومن القائمة المنسدلة نضغط: 5 : Reg

ومن القائمة المنسدلة نضغط: 3 : r فيعطى ناتج معامل الارتباط المطلوب بين المتغيرين x ، y



استخدم الآلة الحاسبة للتحقق من صحة حل المثال السابق.

برنامج SPSS الأحصائى

برنامج (spss) هو اختصار (Statistical package for social sciences) وهو ما يعني الحزم الإحصائية للعلوم الاجتماعية ، وبرنامج spss هو عبارة عن مجموعة من الحزم أو بيانات حسابية شاملة للقيام بتحليل هذه البيانات ، ويتم استخدام هذا البرنامج في الأبحاث العلمية التي تحتوي على بيانات رقمية .

يستطيع البرنامج القيام بقراءة كافة البيانات من كافة أنواع الملفات وتحليلها واستخراج النتائج والتقرير الإحصائية، والبرنامج يتيح للمستخدم تحرير البيانات وتعديلها في شكل متغيرات وبيانات جديدة باستخدام معادلة ، وكذلك حفظ البيانات في ملفات وتسميتها أو تعديل أسماء ملفات البيانات ، أو استرجاع البيانات والملفات والمشاهدات ،

وذلك من خلال التحكم في قائمة من الأوامر والخيارات المتاحة في البرنامج ، لتشمل كافة مراحل تحليل البيانات والعملية الإحصائية من **خلال أربع خطوات هي** :

١ - ترميز البيانات .
٢ - وضع البيانات في البرنامج .
٣ - انتقاء الشكل المناسب واختبار البيانات وتحليلها .
٤ - تحديد البيانات المتغيرة المراد تحليلها وتحقيق عملية الإحصاء .

تشغيل برنامج spss :

يتم فتح وتشغيل برنامج spss عن طريق الضغط على نافذة ابدأ (Start) الموجودة في القائمة الرئيسية ، ثم نقم بالذهاب الى قائمة البرامج (Program) ، والبحث عن برنامج spss ونضغط علي مرتين ليفتح البرنامج

مكونات البرنامج ووظائفها:

لائحة الأوامر (Sntiocnd Funammoc):

وهو عبارة عن شريط الأوامر الخاصة بعمل البرنامج ، حيث يمكن للمستخدم اختيار الامر الذي يريده عن طريق الضغط على ايقونة كل أمر احصائي وبالتالي تعرض النتيجة في لائحة التقارير ، ولائحة الأوامر تشمل عدد تسع أوامر رئيسية والتي عند الضغط عليها يتفرع منها عدد من الأوامر فرعية ، بخلاف ايقونة مساعدة (Help).

بيئة عرض البيانات (Data View) :

هي عبارة عن بيئة يقوم المستخدم بالتحكم في إضافة البيانات التابعة لكل متغير أو إلغائها ، حيث يقوم المستخدم بإيداع أي متغير مستقل في عمود (Column) على شاشة البيانات، حيث يستطيع المستخدم التحويل لعرض ومشاهدة المتغيرات عن طريق الضغط والتنقل بين الامرين (Data View) و (Variable View)، الموجودين اسفل يسار شاشة المتغيرات.

شاشة المتغيرات :

شاشة تعريف البيانات المتغيرة ، والتي تحتوي على أعمدة متوازية ، حيث يحتوي كلم عمود (Column) على البيانات الخاصة بكل متغير ، ولعرض تعريف كل متغير ، يقوم لمستخدم بالضغط بزر الماوس مرتين (Double Click) ، أو يمكنه الضغط على الأمر (Variable View) الموجود أسفل يسار شاشة التعريفات ، وعندها يتغير شكل الشاشة و يظهر شريط عناوين :

- **الاسم** Name
- **النوع** Type
- **الحجم** Width
- **الترميز** Values

وعند الضغط عليه يظهر الترميز ، ومن ثم نضغط على زر (Add) لعرض قيمة الرمز والوضع .

خطوات يمكن للمستخدم التحكم فيها :

(١) إمكانية استرجاع البيانات السابقة : يمكن التحكم في استرجاع البيانات والملفات عن طريق الضغط على زر ملف (File) ثم الضغط على الأمر فتح (Open) ثم يقوم المستخدم باختيار الملف الذي يحتوي على البيانات المراد استرجاعها والتي تشمل التقارير الإحصائية التي تم عملها مسبقا ثم الضغط على حفظ (Save) .

(٢) حفظ المتغيرات الجديد في ملف : يمكن للمستخدم حفظ المتغيرات في ملف ، عن طرق الضغط على الامر (Save) أو الامر (Save as) ليتم الحفظ و إعطاء الملف الجديد الاسم الذي يختاره .

(٣) **إضافة التعديلات وإدارة المتغيرات** : يقوم المستخدم الذهاب الى نافذة محرر البيانات (Data Editor) واضافة البيانات التي يريدها ، **حيث يستطيع** :

- تعديل قيمة البيانات .
- تعريف المتغيرات ، من تحديد نوعية البيانات التي تم إضافتها، والمؤشرات الاقتصادية وكافة المتغيرات.

(٤) **يستطيع المستخدم إضافة متغير جديد** ، وعرض ومشاهدة ترتيب المشاهدات التي حدثت عن طريق استخدام الأمر الرئيسي (Data) ثم اتباع كل تغير يريد من إضافة متغير أو اضافة مشاهدة جديدة أو تعديل ترتيب البيانات .

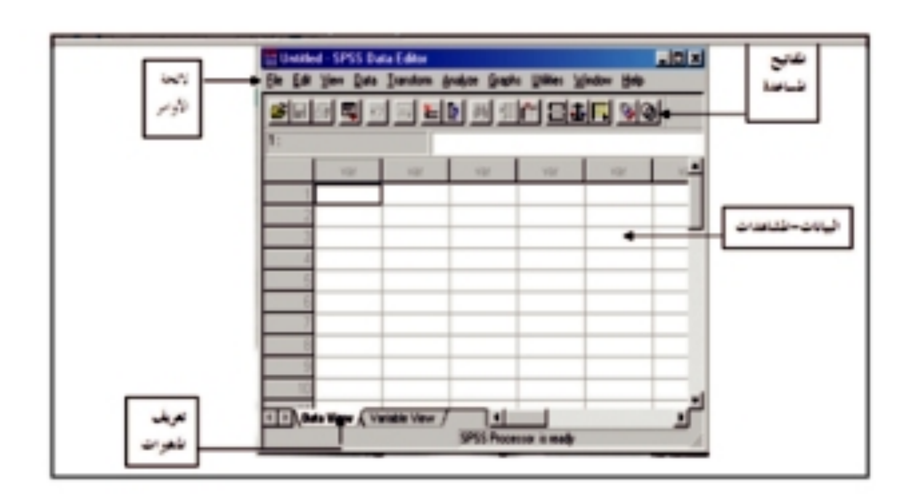
(٥) **تكوين متغير جديد كليا** عن طريق استخدام معادلة ، حيث يذهب الى القائمة الرئيسية (Transform)، ثم الانتقال إلى المربع الجانبي (Compute) وبعد ذلك يقوم بتحديد اسم المتغير الجديد في قائمة (Targer Variable)

(٦) **إمكانية إلغاء أي متغير أو إلغاء مشاهدة** .

(٧) **ترتيب المشاهدات** ، حيث يقوم البرنامج بإنشاء متغير جديد يحتوي على رقم تسلسلي ليتم ترتيب المشاهدات تصاعديا أو تنازليا .

(٨) **إجراء عملية إحصاء** وتحديد الوصف الإحصائي وتدرجه وتكرار البيانات .

(٩) **إمكانية عمل تمثيل للمتغيرات** من خلال إنشاء رسم بياني ، لعرض تحليل المتغيرات وتفسير ما تم في المتغيرات الجديدة.





نشاط

استخدم الشبكة العنكبوتية فى تحميل برنامج (SPSS) من الموقع : ***http://www-01.ibm.com/software/analytics/spss/***
ثم تحقق من صحة حل المثال السابق.

مثال

(٢) أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغير ين س، ص وحدد نوعه. إذا كـان:

$\sum$ س = ٦٨	$\sum$ ص = ٣٦	$\sum$ س ص = ٣٤٨
$\sum$ س^{٢} = ٦٢٠	$\sum$ ص^{٢} = ٢٠٤	ن = ٨

الحل

$$\therefore r = \frac{ن \sum س ص - (\sum س \times \sum ص)}{\sqrt{ن \sum س^2 - (\sum س)^2} \sqrt{ن \sum ص^2 - (\sum ص)^2}}$$

$$\therefore r = \frac{٨ \times ٣٤٨ - (٦٨ \times ٣٦)}{\sqrt{٨ \times ٦٢٠ - (٦٨)^2} \sqrt{٨ \times ٢٠٤ - (٣٦)^2}} = \frac{٣٣٦}{\sqrt{٣٣٦} \sqrt{٣٣٦}} = ١$$

قيمة معامل الارتباط (+ ١) تعني أن هذه العلاقة طردية تامة بين المتغيرين س، ص.

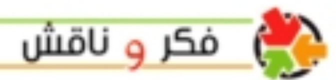
حاول أن تحل

(٢) أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص وحدد نوعه. إذا كان:

$\sum$ س = ٩٢ $\sum$ ص = ٣٦ $\sum$ س ص = ٣٧٢

$\sum$ س٢ = ١١٠٠ $\sum$ ص٢ = ٢٠٤   ن = ٨

معامل ارتباط سبيرمان (الرتب) *Spearman's Rank Correltion Coefficient*



قام إحصائي بدراسة العلاقة بين تقديرات مادتين دراستين لسبع طلاب ودوّن النتائج في الجدول التالي :

المادة الأولى	ضعيف	مقبول	ضعيف	جيد	ضعيف	ممتاز	جيد جدًا
المادة الثانية	ضعيف	مقبول	جيد	مقبول	ضعيف	جيد جدًا	مقبول

فإذا أراد هذا الإحصائي أن يقف على مدى العلاقة بين هاتين المادتين و إيجاد معامل للارتباط بينهما فهل يمكنك مساعدته في ذلك؟

لا نستطيع استخدام معامل ارتباط بيرسون في بند فكر و ناقش لأنه يعتمد على البيانات الكمية (العددية) فقط، ولكن في حالة البيانات الوصفية (كما في البند السابق) فإنه يمكن استخدام معامل ارتباط آخر يعرف بمعامل ارتباط الرتب لسبيرمان، وهو يعطي مقياسًا للارتباط في كل من البيانات الكمية والوصفية التي لها صفة الترتيب كما في البند السابق، و يعتمد هذا المعامل على ترتيب قيم المتغيرات مع الأخذ في الاعتبار الترتيب التصاعدي أو التنازلي ثم نستخدم العلاقة الآتية:

$$r = ١ - \frac{٦ \sum ف^2}{ن(ن^2 - ١)}$$

حيث ف هي الفرق بين رتب المتغيرين س، ص، ن هي عدد قيم كل من المتغيرين.

لاحظ أن

- معامل ارتباط سبيرمان يمكن حسابه سواءً كانت البيانات كمية أو وصفية، بينما معامل ارتباط بيرسون لا يمكن حسابه إلا على المتغيرات الكمية فقط.
- يتميز معامل سبيرمان لارتباط الرتب بسهولته حتى لو كانت البيانات غير مرتبة.
- يُؤخذ على معامل سبيرمان إهماله لفروق الأعداد عند حساب الرتب وبالتالي فهو أقل دقة.

مثال

(٢) أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان فى بند فكر وناقش السابق وحدد نوعه .

الحل

فى هذا المثال نرتب الظاهرتين ترتيبًا تصاعديًا منتظمًا وذلك بأن تعطى كل طالب رتبة تقدير لمادة، وكذلك المادة الثانية للطالب نفسه كما فى الجدول الآتى :

المادة الأولى	ضعيف	مقبول	ضعيف	جيد	ضعيف	ممتاز	جيد جدًا
الترتيب مع التكرار	١	٤	٢	٥	٣	٧	٦
الترتيب النهائى	٢	٤	٢	٥	٢	٧	٦

نلاحظ أن الحالة (ضعيف) تكررت ٣ مرات وشغلت الأماكن ١، ٢، ٣

لذلك تكون رتبة كل منها = $\frac{١ + ٢ + ٣}{٣} = ٢$ (وهو الوسط الحسابى للأعداد ١، ٢، ٣) وبالمثل:

المادة الثانية	ضعيف	مقبول	جيد	مقبول	ضعيف	جيد جدًا	مقبول
الترتيب مع التكرار	١	٣	٦	٤	٢	٧	٥
الترتيب النهائى	١,٥	٤	٦	٤	١,٥	٧	٤

نلاحظ أن المستوى (ضعيف) تكرر مرتين وشغل الأماكن ١، ٢

لذلك تكون رتبة كل منها = $\frac{١ + ٢}{٢} = ١,٥$ (وهو الوسط الحسابى للعددين ١، ٢)

كذلك المستوى(مقبول) تكرر ثلاث مرات وشغل الأماكن ٣، ٤، ٥

لذلك تكون رتبة كل منها = $\frac{٣ + ٤ + ٥}{٣} = ٤$ نلخص الحل فى الجدول الآتى :

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف٢
ضعيف	ضعيف	٢	١,٥	٠,٥	٠,٢٥
مقبول	مقبول	٤	٤	صفر	صفر
ضعيف	جيد	٢	٦	٤-	١٦
جيد	مقبول	٥	٤	١	١
ضعيف	ضعيف	٢	١,٥	٠,٥	٠,٢٥
ممتاز	جيد جدًا	٧	٧	صفر	صفر
جيد جدًا	مقبول	٦	٤	٢	٤
					٢١,٥

$\because$ ر = ١ - $\frac{٦ \text{مجـ ف}^٢}{ن(ن^٢ - ١)}$ $\therefore$ ر = ١ - $\frac{٦ \times ٢١,٥}{٧ (٤٩ - ١)}$

= ١ - $\frac{١٢٩}{٣٣٦}$ ≃ ٠,٦١٦١ وهو ارتباط طردى

حاول أن تحل

٣ فى دراسة عن مدى العلاقة بين مستوى الطلاب فى مادتى الإحصاء والرياضيات وجد أن تقديرات ستة طلاب فى المادتين كالتالى:

تقدير الإحصاء (س)	مقبول	جيد جدًا	ممتاز	جيد جدًا	مقبول	مقبول
تقدير الرياضيات (ص)	جيد	جيد	جيد جدًا	ممتاز	جيد	ضعيف

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين التقديرات وحدد نوعه .



مثال

٤ احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص وذلك من بيانات الجدول التالى:

س	٤	٧	٨	٥	٨	١٢
ص	٧	٦	٦	٤	٦	١٠

الحل

نكون الجدول الآتى:

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف^٢
٤	٧	٦	٢	٤	١٦
٧	٦	٤	٤	٠	٠
٨	٦	٢,٥	٤	-١,٥	٢,٢٥
٥	٤	٥	٦	-١	١
٨	٦	٢,٥	٤	-١,٥	٢,٢٥
١٢	١٠	١	١	٠	٠
					٢١,٥

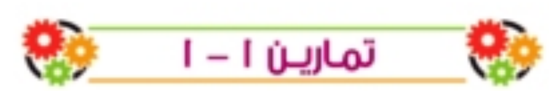
$\because$ ر = ١ - $\frac{٦ \text{مجـ ف}^٢}{ن(ن^٢ - ١)}$ $\therefore$ = ١ - $\frac{٦ \times ٢١,٥}{٦ (٣٦ - ١)}$ ≃ ٠,٣٨٥٧ والارتباط طردى

تفكير ناقد: هل يختلف مجـ ف^٢ إذا رتبنا الظاهرتين س، ص ترتيبًا تصاعديًا؟ فسر إجابتك

حاول أن تحل

٤ احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص وحدد نوعه وذلك من بيانات الجدول التالى:

س	١٠	٧	٨	٧	٦	٤
ص	٥	٨	٧	٩	٩	١٠



أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات التالية:

(١) معامل الارتباط الأقوى فيما يلى هو :

أ ٠,٩٤   ب صفر   ج ٠,٥   د ٠,٨٥

(٢) أقوى معامل ارتباط عكسى فيما يلى هو :

أ -٠,٢   ب -٠,٥   ج -٠,٧   د -٠,٨

(٣) شكل الانتشار الذى يمثل ارتباط عكسى هو:



أ   ب   ج   د

(٤) أضعف معامل ارتباط فيما يلى هو:

أ -١,٢   ب -٠,٧   ج ٠,١٢   د ٠,٩

(٥) أحد الأعداد التالية يمكن أن يمثل أقوى معامل ارتباط عكسي بين متغيرين:

أ ٠,٣   ب ٠,٩   ج -١,١   د -٠,٩٥

(٦) من بيانات الجدول الآتى:

س	١٢	١٠	١٤	١١	١٢	٩
ص	١٨	١٧	٢٣	١٩	٢٠	١٥

أولًا: احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين المتغيرين س، ص

ثانيًا: احسب معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين س، ص

(٧) من بيانات الجدول الآتى:

س	٧	٧	٨	٣	٧	١١
ص	٨	٤	١٢	٢	١٠	١١

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين المتغيرين س، ص

(٨) من بيانات الجدول الآتى :

س	١	٣	٤	٦	٧	٩
ص	٦	٤	٤	٣	٢	١

احسب معامل الارتباط لبيرسون بين قيم س، ص مبينًا نوعه.

(٩) من بيانات الجدول الآتى :

س	٦	٥	٧	٨	١٠	٦	٧
ص	٤	٧	٥	٦	٨	٧	٨

احسب معامل الارتباط لبيرسون بين قيم س، ص وحدد نوعه .

⑩ من بيانات الجدول الآتى:

س	٣	١	٦	٤	٣	٨
ص	٧	٤	٥	٨	٦	٧

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص وحدد نوعه.

⑪ من بيانات الجدول الآتى:

س	جيد جدًا	جيد جدًا	جيد	ضعيف	مقبول	جيد جدًا
ص	جيد	مقبول	جيد	ممتاز	جيد جدًا	مقبول

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص.

⑫ أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص وحدد نوعه إذا كان:

مجـ س = ٢٢٠   مجـ ص = ١٤٠   مجـ س ص = ٢٦٥٨

مجـ س^{٢} = ٥٤٨٦   مجـ ص٢ = ٢٢٩٢   ن = ١٠

⑬ الربط بالتجارة: الجدول الآتى يوضح مجموعة مكونة من ٦ كتب طبقًا لسعرها (س) وحجم المبيعات (ص):

السعر (س)	منخفض	منخفض جدًا	متوسط	مرتفع جدًا	مرتفع	مرتفع جدًا
حجم المبيعات (ص)	مرتفع	مرتفع	مرتفع جدًا	منخفض	متوسط	منخفض

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين سعر الكتاب وحجم مبيعاته.

⑭ الربط بالدعاية: أرادت إحدى الشركات دراسة العلاقة بين إنفاقها على الدعاية س (بالألف جنيه) وحجم مبيعاتها ص (بالألف وحدة). فإذا علمت أن بيانات فروع الشركة الثمانية كانت كالآتى:

س	١٩	١٨	٧	١٠	٤	١٣	١٥	٥
ص	١٢	١٠	٧	٩	٦	١٣	١٤	١٢

فأوجد معامل ارتباط الرتب بين حجم الإنفاق على الدعاية وحجم المبيعات مبينا نوع الارتباط .

⑮ الربط بالتعليم: البيانات التالية تمثل درجات عشرة طلاب فى مادتى الكيمياء والأحياء.

الكيمياء	٦٠	٨٥	٥٥	٩٠	٦٥	٥٠	٨٠	٧٠	٩٥	٧٥
الأحياء	٥٥	٧٥	٥٠	٩٥	٦٠	٦٥	٨٥	٨٠	٩٠	٧٠

احسب معامل الارتباط الخطى لبيرسون وحدد نوعه .

⑯ الربط بالمواليد: فى دراسة لتحديد العلاقة بين عمر الأم وعدد أطفالها. جاءت البيانات كما يلى :

عُمر الأم	١٨	٢٠	٢٣	٢٧	٢٩	٣٢	٣٣	٣٥
عدد الأطفال	٢	١	١	٢	٣	٤	٣	٥

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان وحدد نوعه.

الوحدة الأولى

١ - ٢

الانحدار

Regression

سوف تتعلم

- تعريف الانحدار
- أنواع الانحدار
- معادلة خط الانحدار
- طريقة المربعات الصغرى
- أنشطة على إيجاد معادلة خط الانحدار .

المصطلحات الأساسية

- الانحدار Regression
- خط الانحدار Regression Line
- المربعات الصغرى Least Square

تذكر أن

- الدالة هى علاقة بين مجموعتين س، ص بحيث يكون لكل عنصر من عناصر س عنصر وحيد من عناصر ص.
- تتحدد الدالة متى عُلم كل من: المجال - المجال المقابل - قاعدة الدالة

تمهيد

سبق أن درست الدالة، وتعرفت الشكل البيانى لها، كما تعرفت فى الدرس السابق شكل الانتشار، وعلمت أن الهدف من رسمه هو تحديد طبيعة العلاقة بين المتغيرين س ، ص من خلال البيانات المتعلقة بهما كما علمت أن خصائص الارتباط بين ظاهرتين يمكن أن تأخذ إحدى الصور الآتية :

- علاقة خطية Linear Relationship
- علاقة خطية عكسية Negative Linear Relationship
- علاقة غير خطية Non-Linear Relationship
- لا توجد علاقة No Relationship

وفى هذا الدرس سوف ندرس كيفية تحديد معادلة خط الانحدار Equation of Regression Line والهدف من هذه الدراسة هو مساعدة الباحث على معرفة نوع البيانات المعطاة و إجراء تنبؤات صحيحة من خلالها .

تعريف الانحدار هو أسلوب إحصائى يمكن بواسطته تقدير قيمة أحد المتغيرين بمعلومية قيمة المتغير الآخر.

وله عدة أنواع :

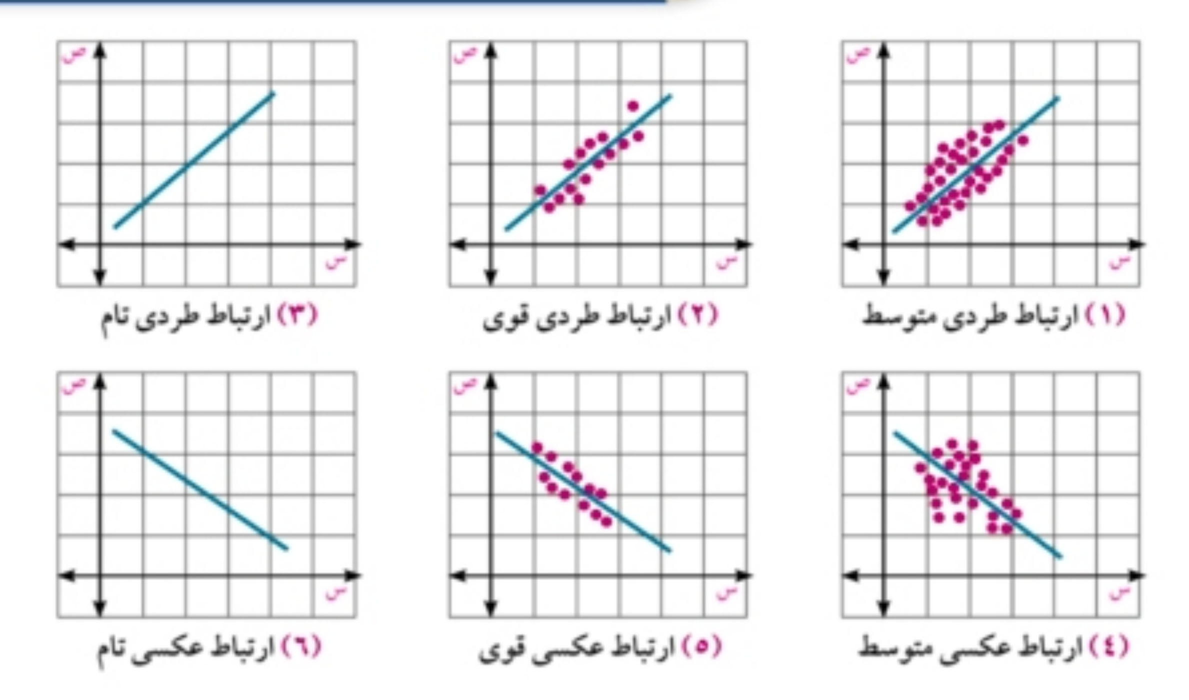
أ **الانحدار الخطى البسيط :** و يعتمد فيه المتغير التابع (ص) على متغير واحد (س) من خلال علاقة خطية .

ب **الانحدار المتعدد :** و يعتمد فيه المتغير التابع (ص) على أكثر من متغير مستقل .

جـ **الانحدار غير الخطى :** إذا كانت العلاقة بين المتغير التابع (ص) والمتغيرات المستقلة غير خطية (من الدرجة الثانية أو الثالثة أو أسية أو لوغاريتمية أو .....)

وسنقتصر فى هذا الدرس على الانحدار الخطى البسيط فقط . والأشكال التالية توضح العلاقة بين قيمة معامل الارتباط واختلاف وضع النقاط على خط الانحدار . وكلما اقتربت النقاط من الانطباق على هذا الخط زادت أو نقصت قيمة (ر) الى أن تصل إلى انطباق جميع النقاط على الخط وفى هذه الحالة تكون قيمة (ر) إما (+ ١) أو (- ١).

الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية. برنامج SPSS للحاسوب. برنامج : Microsoft Excel.



معادلة خط الانحدار *Equation of Regression Line*

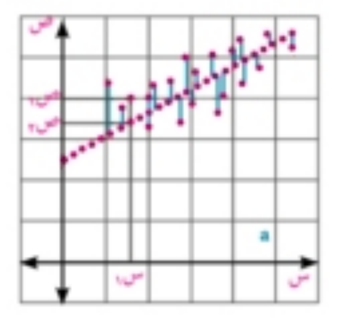
سبق أن درسنا فى الهندسة التحليلية معادلة الخط المستقيم الذى ميله م ويقطع جزءًا من محور الصادات مقداره جـ وهى : ص = م س + جـ .

وبالعودة إلى أشكال الانتشار الموضحة سابقًا نجد أنه إذا بدا شكل الانتشار كما فى أى من الشكلين (٢) أو (٥) فإن هذا يشير بصفة مبدئية بأن العلاقة بين المتغيرين خطية؛ لأننا نستطيع أن نتصور وجود خط مستقيم تقع النقط من حوله وقريبة منه وإن كانت لا تقع جميعها عليه، أما إذا بدا شكل الانتشار كما فى أى من الشكلين (١) أو (٤) فإننا نشك فى خطية العلاقة بين المتغيرين. ولذا فإن مهمتنا الأساسية هى استخدام أزواج القيم ($س_ر$ ، $ص_ر$) المشاهدة لإيجاد أفضل خط مستقيم يلائم مجموعة نقط العينة ولتكن معادلته هى:

$$ص = أ + ب س$$

والطريقة الأكثر شيوعًا لإيجاد أفضل قيم لـ أ ، ب تسمى طريقة المربعات الصغرى.

طريقة المربعات الصغرى: *Least Square Method*



علمنا مما سبق أنه فى حالة الارتباط ليس بالضرورة أن تقع جميع النقاط على خط الانحدار ، لذلك يكون هناك نسبة خطأ للنقاط التى لا تقع على خط الانحدار، وللحصول على أفضل خط الانحدار يجب تقليل الانحرافات لأصغر قيمة ممكنة (خط الانحدار المناسب يمر أو يقترب بأكبر عدد من نقاط الانتشار) فإذا كان (س، ص) هى إحدى النقط الحقيقية للبيانات وكانت (س، $\hat{ص}$) هى النقطة الواقعة على خط الانحدار ($\hat{ص}$ تقرأ ص هات) فإن خط الانحدار المناسب عندما يكون $|\hat{ص} - ص|$ اقل مايمكن لجميع قيم س أو عندما $\sum(\hat{ص} - ص)^٢$ اقل مايمكن

وبفرض معادلة خط الانحدار هى $\hat{ص} = أ + ب س$

∴ الفرق المطلق = | (أ + ب س) - ص |

والمطلوب تعيين قيمتى أ ، ب بحيث يكون الفرق المطلق اقل ما يمكن وذلك بحل المعادلتين الآتيتين:

$\sum$ ص = ن أ + ب $\sum$ س **(١)** ، $\sum$ س ص = أ $\sum$ س + ب $\sum$ س^{٢} **(٢)**

حيث من المعادلة (١) أ = $\frac{\sum ص - ب \sum س}{ن}$ وبالتعويض فى (٢)

ب = $\frac{ن \sum س ص - (\sum س)(\sum ص)}{ن \sum س^{٢} - (\sum س)^{٢}}$ تسمى بمعامل انحدار ص على س وهى تعبر عن ميل خط الانحدار على الاتجاه الموجب لمحور السينات .

وتستخدم معادلة خط انحدار ص على س فى:

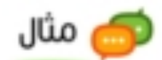
١- التنبؤ بقيمة ص إذا علمت قيمة س

٢- تحديد مقدار الخطأ الذى يتحدد من العلاقة :

مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية - القيمة التى تحقق معادلة الانحدار |

ملاحظة: عند استخدام معادلة الانحدار فى التنبؤ (التقدير) يفضل ألا نتجاوز كثيرًا مدى المتغير س المستخدم فى حساب معادلة الانحدار.

تفكير ناقد: قيمة معامل الانحدار تدل على الارتباط. فسر هذه العبارة.



مثال

(١) الجدول التالى يمثل إنتاج أحد المحاصيل الصيفية (ص) من المساحة المنزرعة (س) بالفدان :

المساحة المزروعة (س) بالفدان	٥٠	٢٠٠	١١٠	٨٠	١٢٠	٧٤,٥	٨٨,٩	٥,٧	١١	٣,٢
الإنتاج (ص) بالكيلوجرام	١٤٠	٥٠٠	٤٠٠	٣٠٠	٣٥٦	٢٤٠,٥	٢٠٠,٦	٣٣,٥	٦٩,٨	١٨,٧

أولًا : أوجد معادلة خط الانحدار.

ثانيًا : تنبأ بقيمة الإنتاج بالكيلوجرام إذا كانت المساحة المزروعة تساوى ١٠٠ فدان.

ثالثًا : أوجد مقدار الخطأ فى الإنتاج إذا علمت أن المساحة المزروعة ١٢٠ فدانًا.



الحل

الحل باستخدام الآلة الحاسبة العلمية:

١- إدخال البيانات :

نتبع نفس الطريقة السابق شرحها فى مثال (١) فى الدرس السابق (الارتباط) لإدخال البيانات.

٢- استدعاء النواتج :

نضغط على المفاتيح التالية :

نستخدم المفاتيح التالية لإيجاد نواتج العمليات الآتية : (STAT) 1 SHIFT

نختار من القائمة المنسدلة : 3 : sum ونضغط على المفتاح 3

تظهر لنا قائمة أخرى جديدة من ١ إلى ٨ (مجاميع النواتج) نختار منها الآتى :

٤ : Σy = ٢٢٥٩,١ ٢ : Σx = ٧٤٣,٣

٥ : Σxy = ٢٥٤٤٨٩,١٨ ١ : Σx^2 = ٨٩٠١٧,١٩

أولًا : نحسب قيمة الثابت ب من العلاقة :

$$\text{ب} = \frac{\text{ن}\sum\text{س ص} - \sum\text{س}\sum\text{ص}}{\text{ن}\sum\text{س}^2 - (\sum\text{س})^2}$$

$$= \frac{١٠ \times ٢٥٤٤٨٩,١٨ - ٧٤٣,٣ \times ٢٢٥٩,١}{١٠ \times ٨٩٠١٧,١٩ - (٧٤٣,٣)^2} \simeq ٢,٥٦٣٧$$

نحسب قيمة الثابت أ من العلاقة : $\text{أ} = \overline{\text{ص}} - \text{ب}\,\overline{\text{س}}$

حيث : $\overline{\text{س}} = \frac{\sum\text{س}}{\text{ن}}$ ، $\overline{\text{ص}} = \frac{\sum\text{ص}}{\text{ن}}$

$\therefore \overline{\text{س}} = \frac{٧٤٣,٣}{١٠} = ٧٤,٣٣$ ، $\overline{\text{ص}} = \frac{٢٢٥٩,١}{١٠} = ٢٢٥,٩١$

$\therefore$ أ = ٢٢٥,٩١ − ٢,٥٦٣٧ × ٧٤,٣٣ ≃ ٣٥,٣٥

ملاحظة:

يمكن حساب الثابت أ مباشرة كالآتى:

$\because \text{أ} = \frac{\sum\text{ص} - \text{ب}\sum\text{س}}{\text{ن}}$ $\therefore \text{أ} = \frac{٢٢٥٩,١ - (٢,٥٦٣٧ \times ٧٤٣,٣)}{١٠} \simeq ٣٥,٣٥$

$\therefore$ معادلة خط الانحدار هى : $\hat{\text{ص}}$ = ٢,٥٦٤ س + ٣٥,٣٥

ثانيًا : من معادلة خط الانحدار : $\hat{\text{ص}}$ = أ + ب س

$\because$ $\hat{\text{ص}}$ = ٢,٥٦٤ س + ٣٥,٣٥ وبالتعويض عن س = ١٠٠

$\therefore$ $\hat{\text{ص}}$ = ٢,٥٦٤ × ١٠٠ + ٣٥,٣٥ = ٢٩١,٧٢ كيلوجرام

يمكن التحقق من صحة الناتج باستخدام الآلة الحاسبة كالآتى:

100 SHIFT 1 (STAT) 5 (Reg) 5 : $\hat{y}$ =

ثالثًا : لإيجاد مقدار الخطأ فى الإنتاج إذا علمت أن س = ١٢٠ فدانًا

$\because$ $\hat{\text{ص}}$ = ٢,٥٦٤ س + ٣٥,٣٥

$\therefore$ $\hat{\text{ص}}$ = ٢,٥٦٤ × ١٢٠ + ٣٥,٣٥ ≃ ٣٤٣

$\because$ مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية − القيمة التى تحقق معادلة الانحدار |

$\therefore$ مقدار الخطأ = | ٣٥٦ − ٣٤٣ | = ١٣

نشاط

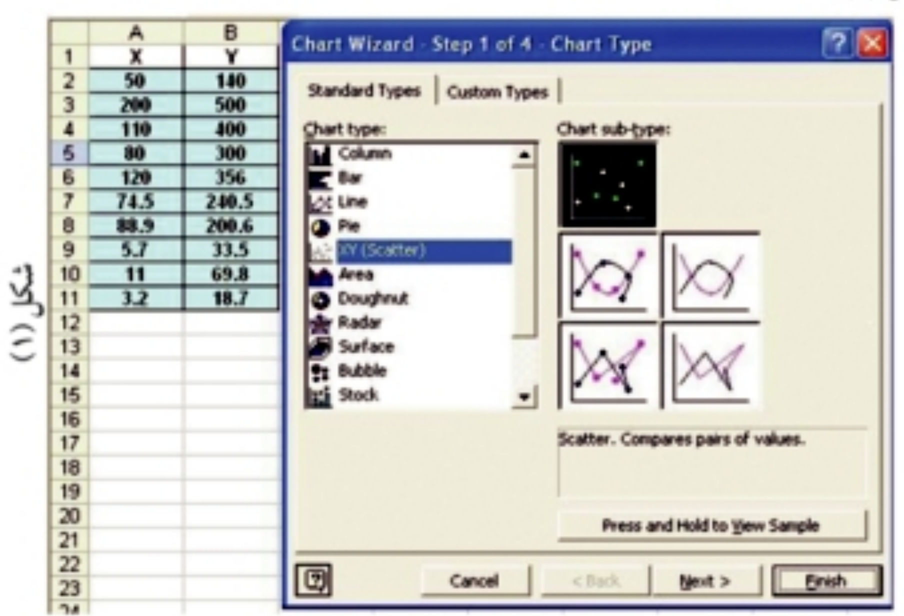
أولًا: تحقق من صحة حل المثال السابق باستخدام برنامج (Microsoft Excel)

ثانيًا: تحقق من صحة حل المثال السابق باستخدام برنامج الإحصاء (spss)

أولاً : استخدام برنامج *Microsoft Exceel*

١- افتح برنامج Microsoft Exceel وأدخل البيانات السابقة في خلايا العمودين (B) ، (A) تحت اسم (Y) ، (X) كمتغيرين حقيقيين أو الاسم الحقيقي لتلك البيانات كما هو موضح في شكل (١) .

٢- من شريط الأدوات نضغط على Chart Wizard فنحصل على Chart Type ثم من القائمة XY Scatter نضغط على Finish. كما في شكل (٢).



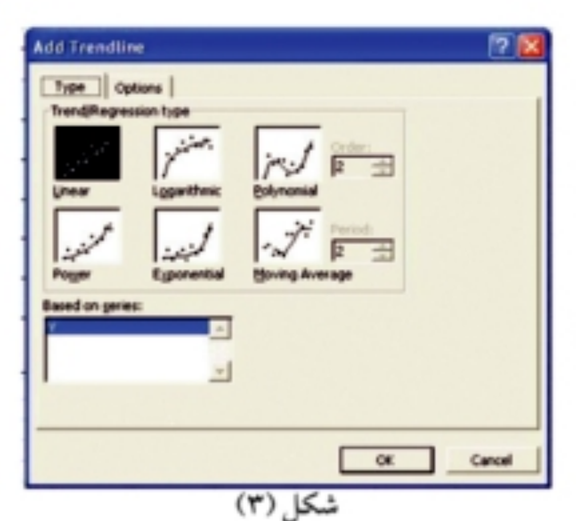
	A	B
1	X	Y
2	50	140
3	200	500
4	110	400
5	80	300
6	120	356
7	74.5	240.5
8	88.9	200.6
9	5.7	33.5
10	11	69.8
11	3.2	18.7

شكل (٢)

٣- يبين شكل (٣) التمثيل البياني للنقاط المدرجة في الجدول والذي يسمى شكل الانتشار . نختار منها الشكل المظلل باللون الأسود. والذي يظهر هنا بعد إجراء تغير في الخلفية كما مبين بالشكل.

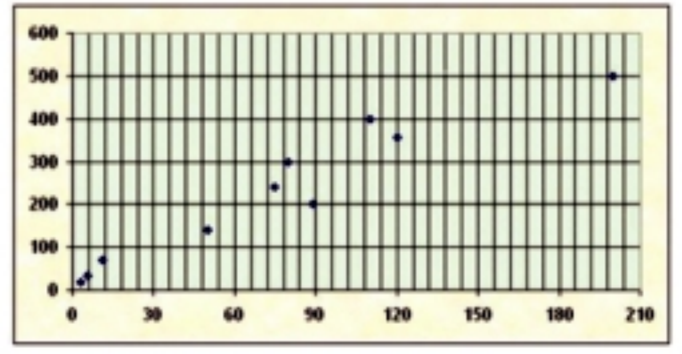
٤- القيم على المحور الأفقي تمثل قيم x للبيانات والمحور الرأسي للقيم y ونحن هنا بصدد إيجاد معادلة خط انحدار y على x والتي تأخذ الصورة الآتية:

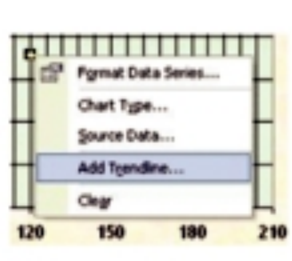
$$Y = a + bX.$$



شكل (٣)

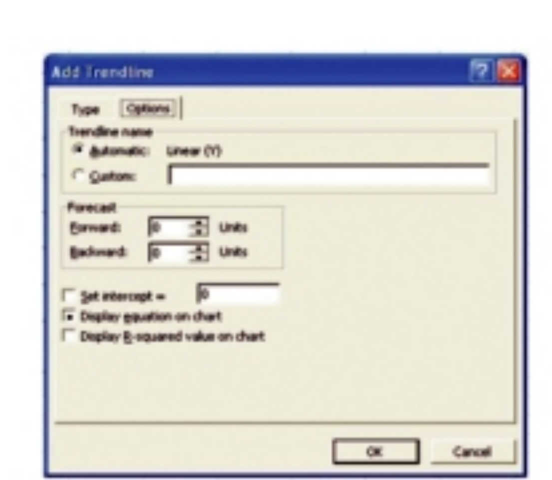
٥- بزر الفأرة الأيمن نضغط على إحدى النقاط (في الشكل (٤)) فتظهر القائمة المبينة بالشكل حيث نختار منها Add Trendline و بالنقر عليها بالفأرة نحصل على الشكل التالي الذي يظهر ستة أشكال من الانتشار، قمنا باختيار الأول منها كما مبين بالتظليل باللون الأسود كخيار مقبول؛ لكوننا نريد الخط المستقيم ومن ثم من Options لتحديد المطلوب وذلك بالنقر عليها بالفأرة حيث يظهر صندوق الحوار الآتي :





شكل (٤)

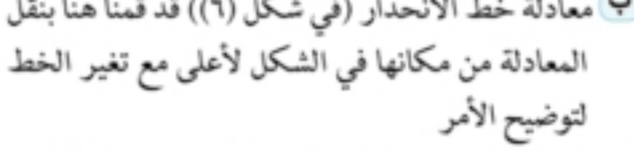
٦- نعلم على Display equation on chart كما هو مبين بالشكل (٥)



شكل (٥)

٧- نضغط على OK للحصول على المطلوب وهو:

أ) الشكل المبين فيه خط الانحدار متوسط النقاط الممثلة لأزواج البيانات.

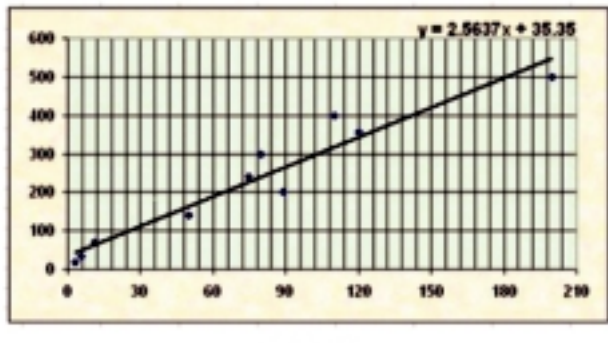


ب) معادلة خط الانحدار (في شكل (٦)) قد قمنا هنا بنقل المعادلة من مكانها في الشكل لأعلى مع تغير الخط لتوضيح الأمر

والشكل التالي هو نتاج العملية والذي يبين لنا المطلوب وخاصة المعادلة الآتية:

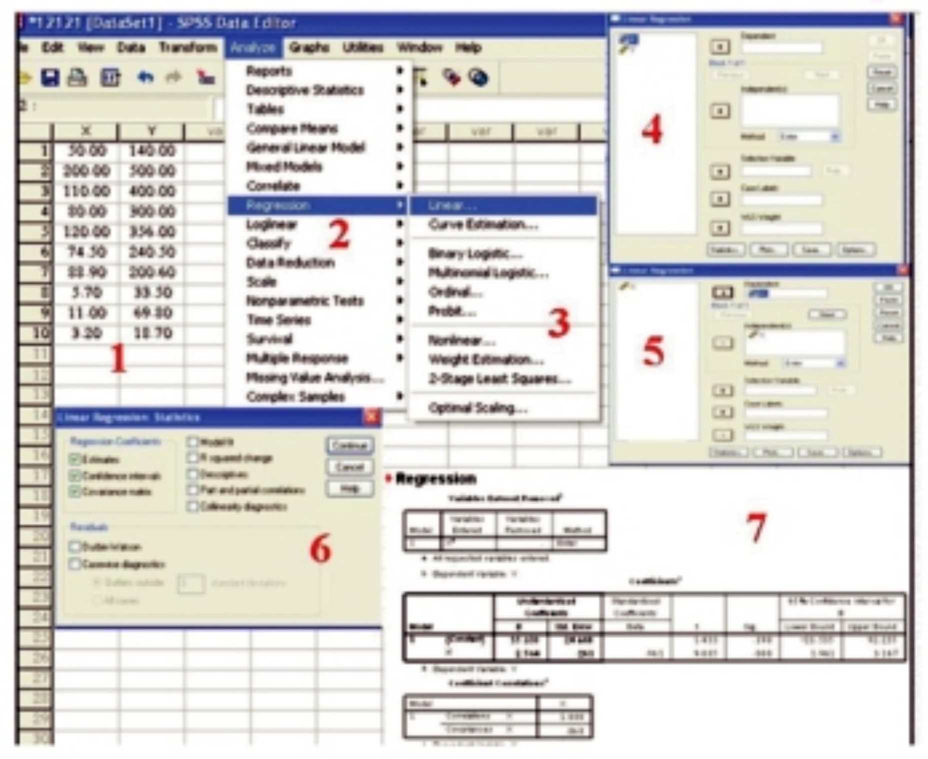
$35.35 + 2.5637x = Y$

وهي معادلة خط الانحدار وهي نفس المعادلة التي وجدناها في الحل السابق .



شكل (٦)

استخدام برنامج SPSS



شكل (٧)

مثال

٢) الربط بالتعدين يبين الجدول التالى بيانات عن متوسط سعر برميل البترول ومعدلات النمو الاقتصادي في إحدى الدول خلال ثماني سنوات والمطلوب إيجاد:

سعر برميل البترول (س)	٣٦	٤٠	٣٦,٢	٣١,١	٢٩,٧	١٦,٣	١٨,٧	١٤,٦
معدل النمو الاقتصادى (ص)	٠,٩١	٣,٥	٣,٢	٢,٧	٢,٣	١-	٠,٩-	١,٦-

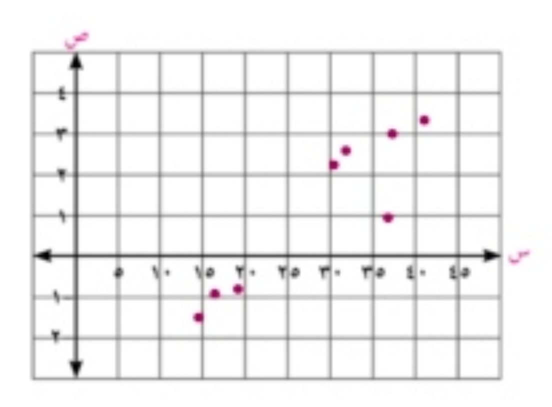
أولًا : ارسم شكل الانتشار وبين منه نوع الارتباط .

ثانيًا : أوجد معادلة خط الانحدار للبيانات المعطاة .

ثالثًا : تنبأ بالنمو الاقتصادى عندما يكون سعر البرميل ١٥ دولارًا، ثم عندما يصبح سعره ٣٥ دولارًا .

الحل

أولًا: الشكل المقابل يمثل شكل الانتشار وهو يبين أن الارتباط طردى .



س	ص	س٢	ص٢	س ص
٣٦	٠,٩١	١٢٩٦	٠,٨٢٨١	٣٢,٧٦
٤٠	٣,٥	١٦٠٠	١٢,٢٥	١٤٠
٣٦,٢	٣,٢	١٣١٠,٤٤	١٠,٢٤	١١٥,٨٤
٣١,١	٢,٧	٩٦٧,٢١	٧,٢٩	٨٣,٩٧
٢٩,٧	٢,٣	٨٨٢,٠٩	٥,٢٩	٦٨,٣١
١٦,٣	١-	٢٦٥,٦٩	١	١٦,٣-
١٨,٧	٠,٩-	٣٤٩,٦٩	٠,٨١	١٦,٨٣-
١٤,٦	١,٦-	٢١٣,١٦	٢,٥٦	٢٣,٣٦-
٢٢٢,٦	٩,١١	٦٨٨٤,٢٨	٤٠,٢٦٨١	٣٨٤,٣٩

من بيانات الجدول:

مجـ ص = ٩,١١   مجـ س = ٢٢٢,٦

مجـ س ص = ٣٨٤,٣٩   مجـ س٢ = ٦٨٨٤,٢٨

ثانيًا : نحسب قيمة الثابت ب من العلاقة :

$$ب = \frac{ن مجـ س ص - مجـ س \; مجـ ص}{ن مجـ س^٢ - (مجـ س)^٢}$$

$$= \frac{٨ \times ٣٨٤,٣٩ - (٢٢٢,٦ \times ٩,١١)}{٨ \times ٦٨٨٤,٢٨ - (٢٢٢,٦)^٢} \simeq ٠,١٨٩٦$$

$$\because أ = \frac{مجـ ص - ب مجـ س}{ن}$$ $$\therefore أ = \frac{٩,١١ - (٠,١٨٩٦ \times ٢٢٢,٦)}{٨} \simeq -٤,١٣٦٨$$

∵ معادلة خط الانحدار هي : $\hat{ص} = أ + ب س$

∴ $\hat{ص} = ٠,١٨٩٦ س - ٤,١٣٦٨$

ثالثًا :

عندما س = ١٥   تكون : $\hat{ص} = ٠,١٨٩٦ \times ١٥ - ٤,١٣٦٨ \simeq -١,٢٩٢٨$

عندما س = ٣٥   تكون : $\hat{ص} = ٠,١٨٩٦ \times ٣٥ - ٤,١٣٦٨ \simeq ٢,٤٩٩٢$

حاول أن تحل

(١) في دراسة العلاقة بين الدخل (س) والاستهلاك (ص) بآلاف الجنيهات كانت النتائج الآتية:

مجـ س = ١٢٠ ، مجـ ص = ١٠٠ ، مجـ س ص = ٥١٦

مجـ س٢ = ٧٢٠ ، مجـ ص٢ = ٤١٠ ، ن = ٤٠

(أ) أوجد معامل الارتباط الخطي بين س، ص بطريقة بيرسون وحدد نوعه.

(ب) معادلة خط الانحدار.

(جـ) تنبأ بقيمة الاستهلاك (ص) عندما يصل الدخل ١٠٠٠٠ جنيه.



أولًا : أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات التالية:

(١) المعادلة الإحصائية لمعادلة خط الانحدار حيث ب معامل الانحدار هي:

أ) صَ = ا س + ب   ب) صَ = ا + ب س

جـ) صَ = ا ص + ب   د) صَ = ا + ب ص .

(٢) إذا كانت معادلة خط الانحدار هى : صَ = ٢ + ٠,٥ س فإن قيمة ص المتوقعة عندما س = ٦ هى :

أ) ٤   ب) ٥   جـ) ٧   د) ٨

(٣) إذا وقعت النقطتان (٥,١١ ، ١٠) ، (٦,٥ ، ٥) على خط انحدار ص على س فإن الارتباط بين س ، ص يكون :

أ) طرديًا   ب) عكسيًا   جـ) تامًا   د) منعدمًا

(٤) إذا وقعت النقطتان (٥ ، ١٣) ، (١٤ ، ٤) على خط انحدار ص على س فإن جميع النقاط التالية تقع على نفس الخط ما عدا النقطة :

أ) (١٥ ، ٥)   ب) (١٠ ، ٨)   جـ) (٦ ، ١٢)   د) (٥ ، ١٣)

(٥) إذا كانت جميع النقاط في شكل الانتشار تقع على خط مستقيم ميله سالب فإن معامل الارتباط بين س، ص يساوي:

أ) ١   ب) صفر   جـ) -٠,٥   د) -١

(٦) إذا كانت جميع النقاط في شكل الانتشار تقع على خط مستقيم ميله موجب، فان معامل الارتباط بين المتغيرين يساوى :

أ) -١   ب) صفر   جـ) $\frac{١}{٢}$ د) ١

ثانيًا : أجب عن الأسئلة الآتية:

(٧) الجدول الآتى يبين العلاقة بين متغيرين س ، ص :

س	٥	٨	١٠	١٤	١٦	٢٠
ص	٤	٦	٩	١١	١٢	١٥

أ) أرسم شكل الانتشار   ب) أوجد معادلة خط الانحدار

جـ) تنبأ بقيمة ص عندما س = ١٢

(٨) من بيانات الجدول الآتى:

س	٢٠	٣٣	٣٠	٤٠	١٣	١٥	٣٦	٢٥
ص	٧	٨	٩	١١	٤	٥	٨	٩

أ) تنبأ بقيمة ص عندما س = ٣٥

ب) أوجد مقدار الخطأ فى ص = إذا كانت س = ٣٠

⑨ في دراسة إحصائية لإيجاد العلاقة بين متغيرين س ، ص حصلنا على البيانات التالية:
ن = ١٠ ، $\overline{س}$ = ٨ ، $\overline{ص}$ = ١٠ ، Σ س ص = ٨٧٠ ، Σ س^{٢} = ٦٦٥ ، Σ ص^{٢} = ١٤٠٠ أوجد:

أ معامل الارتباط الخطى.

ب معادلة خط الانحدار.

⑩ إذا كان : Σس = ٣٠ ، Σ ص = ٤٠ ، Σ س ص = ١٦٢
Σ س^{٢} = ٢١٠ ، Σص^{٢} = ٣٠٤ ، ن = ٦ فأوجد :

أ معادلة خط الانحدار.

ب معامل الارتباط الخطى بين س ، ص محددا نوعه.

⑪ الربط بالمبيعات: في أحد أماكن بيع السيارات المستعملة كانت المبيعات على النحو التالي:

عمر السيارة (س)	٣	٢	١	١	٥	٦	١	٤
ثمن البيع (ص)	٥٤	٨٠	٧٤	٩٨	٤٥	٤٠	٨٥	٦٠

أ معامل الارتباط الخطى لبيرسون

ب معادلة خط الانحدار .

⑫ الربط بالاقتصاد: الجدول التالي يمثل الدخل الشهرى (س) والإنفاق (ص) لمجموعة من الأسر بمئات الجنيهات:

الدخل (س)	٣٨	٢٧	٣٩	٤٠	٥٦	٦٦	٤٢	٤٤
الإنفاق (ص)	١٩	٢٥	٢٠	٢٨	٣١	٣٨	٢٧	٢٢

أ أوجد معامل ارتباط الرتب بيرسون وحدد نوعه.

ب أوجد معادلة خط الانحدار .

ج قَدِّر قيمة الانفاق (ص) إذا كان الدخل (س) ٥٠٠٠ جنيه .

د أوجد مقدار الخطأ في (ص) إذا كانت س = ٤٠ .

⑬ الربط بالأسرة: لدراسة العلاقة بين الدخل "ص" والاستهلاك "س" بمئات الجنيهات شهريًا في إحدى المدن، أُخذت عينة مكونة من ٤٠ أسرة فأعطت النواتج الآتية:
Σ س = ١٠٠ ، Σ ص = ١٢٠ ، Σ س ص = ٥١٦ ، Σ س٢ = ٤١٠ ، Σ ص^{٢} = ٧٢٠ .

أ أوجد معادلة خط الانحدار.

ب تنبأ بدخل الأسرة التي يبلغ استهلاكها ٧٠٠ جنيه شهريًا.

ملخص الوحدة

١ **الارتباط** طريقة إحصائية يمكن من خلالها تحديد درجة ونوع العلاقة بين متغيرين .

٢ **شكل الانتشار** هو تمثيل بيانى لعدد من الأزواج المرتبة (س ، ص) لوصف العلاقة بين متغيرين .

٣ **يُعرف الارتباط الخطي البسيط** بأنه الدرجة أو القيمة العددية للعلاقة بين متغيرين فقط

٤ **معامل الارتباط:** يرمز له بالرمز (ر) وهو عبارة عن مقياس كمى نسبى يقيس قوة الارتباط بين متغيرين حيث - ١ ≤ ر ≤ ١ ، و يقال إن الارتباط طردى تام إذا كان معامل الارتباط ر = ١، و يقال إن الارتباط عكسى تام إذا كان معامل الارتباط ر = - ١ ، و ينعدم الارتباط عندما ر = ٠



٥ **معامل الارتباط الخطى لبيرسون** :

$$\text{ر} = \frac{\text{ن}\sum \text{س ص} - \sum \text{س} \times \sum \text{ص}}{\sqrt{\text{ن}\sum \text{س}^2 - (\sum \text{س})^2}\ \sqrt{\text{ن}\sum \text{ص}^2 - (\sum \text{ص})^2}}$$

٦ **معامل ارتباط الرتب لسبيرمان:**

$$\text{ر} = ١ - \frac{٦\sum \text{ف}^2}{\text{ن}(\text{ن}^2 - ١)}$$

٧ **الانحدار** : أسلوب إحصائى يمكن بواسطته تقدير قيمة أحد المتغيرين بمعلومية قيمة المتغير الآخر.

٨ **معادلة خط الانحدار** : $\hat{\text{ص}} = \text{أ} + \text{ب س}$

حيث :

أ طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

ب معامل انحدار ص على س وهى تعبر عن ميل خط الانحدار على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

$$\text{ب} = \frac{\text{ن}\sum \text{س ص} - \sum \text{س} \sum \text{ص}}{\text{ن}\sum \text{س}^2 - (\sum \text{س})^2} ،\quad \text{أ} = \frac{\sum \text{ص} - \text{ب}\sum \text{س}}{\text{ن}}$$

٩ **تستخدم معادلة خط الانحدار فى** :

التنبؤ بقيمة ص إذا عُلمت قيمة س .

تحديد مقدار الخطأ الذى يتحدد من العلاقة :

مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية – القيمة التى تحقق معادلة الانحدار |

تمـــارين عامة

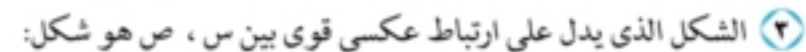
أولًا : أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات التالية:

(١) أقوى معامل ارتباط عكسى فيما يلى هو:

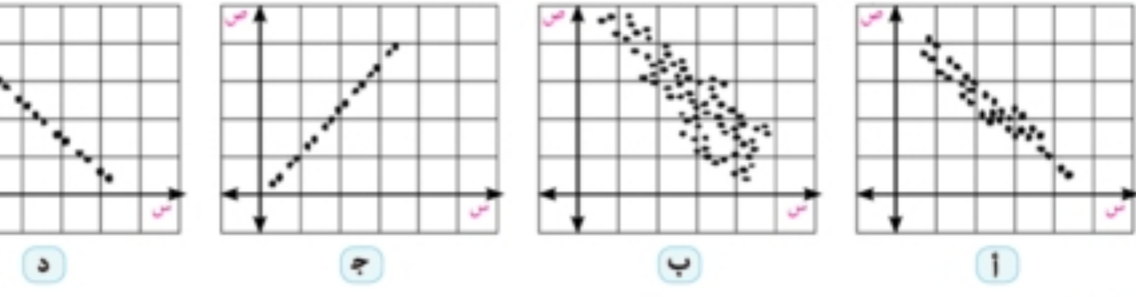
أ - ٠,٩   ب - ٠,٥   جـ - ٠,١   د صفر

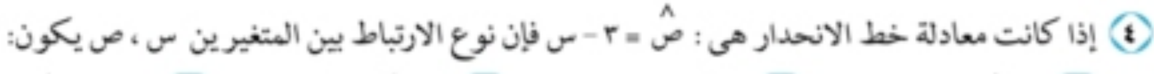
(٢) أقل معامل ارتباط فيما يلى هو:

أ - ١,١   ب - ٠,٩   جـ ٠,١٢   د ١,٠٢



(٣) الشكل الذى يدل على ارتباط عكسى قوى بين س ، ص هو شكل:





أ   ب   جـ   د

(٤) إذا كانت معادلة خط الانحدار هى : $\hat{ص}$ = ٣ - س فإن نوع الارتباط بين المتغيرين س ، ص يكون:

أ طرديًا تامًا   ب لا يوجد ارتباط   جـ منعدمًا   د عكسيًا تامًا

(٥) إذا كانت معادلة خط الانحدار هى : $\hat{ص}$ = ٧ - ٠,٨ س فإن قيمة ص المتوقعة عندما س = ٥ هى :

أ ٢   ب ٣   جـ ٥   د ٧

(٦) إذا وقعت النقطتان (٢ ، ٨) ، (٧ ، ٣) على خط انحدار ص على س وكان الارتباط تامًا ، فإن معامل الارتباط الخطى يساوى :

أ - ١   ب صفر   جـ $\frac{١}{٢}$ د ١

ثانيًا : أجب عن الأسئلة الآتية:

(٧) إذا كان :

Σ س = ٥٠   Σ ص = ٤٠   ن = ١٠

Σ س ص = ٢١٣   Σ $س^٢$ = ٢٩٨   Σ $ص^٢$ = ١٧٦

أوجد قيمة معامل الارتباط لبيرسون بين المتغيرين س وحدد نوعه ودرجته

(٨) من بيانات الجدول الآتى:

س	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ص	١٢	٧	١٢	٣	١٤	١٥	٢١

احسب معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين س ، ص وحدد نوعه.

(٩) من بيانات الجدول الآتى:

س	٣٢	٤٢	٤٠	٣٥	٣١	٤٦	٥٠	٣٣
ص	٢٥	٣٤	٣٥	٣٠	١٧	٢٨	٤٢	١٩

احسب معامل الارتباط الرتب لسبيرمان بين قيم س ، ص وحدد نوعه.

(١٠) من بيانات الجدول الآتى:

س	ممتاز	جيد	جيد جدًا	مقبول	ضعيف	جيد
ص	جيد	ضعيف	مقبول	ممتاز	جيد جدًا	مقبول

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س ، ص

(١١) **الربط بالتجارة:** الجدول الآتى يمثل حجم المبيعات س والربح الناتج ص لمجموعة مكونة من ٦ شركات، والمطلوب حساب معامل ارتباط بيرسون بين حجم المبيعات والربح.

حجم المبيعات س	٥٠٠	٦٠٠	٤٠٠	٤٨٠	٥٥٠	١٠٠
الربح ص	٣٠٠	٤٠٠	٢٥٠	٢٠٠	٤٠٠	٩٠

(١٢) من بيانات الجدول الآتى:

س	١٠	١٢	١٥	١٢	١٤	٨
ص	٦	٨	٦	٦	٩	٥

(أ) أوجد معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين المتغيرين س ، ص وحدد نوعه .

(ب) أوجد معادلة خط الانحدار ثم تنبأ بقيمة $\hat{ص}$ عندما س = ٧ .

(١٣) **الربط بالتجارة:**

لدراسة العلاقة بين الكمية (ص) من سلعة ما والسعر (س) بالجنيه كانت لدينا البيانات الآتية:

$\sum$ س = ٤٩ ، $\sum$ ص = ٧٧ ، $\sum$ س ص = ٦٠٩ ، $\sum$ س^2 = ٣٧١ ، $\sum$ ص^2 = ١٠٤٩ ، ن = ٧ أوجد :

(أ) معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين الكمية المطلوبة والسعر.

(ب) تقدير الكمية ($\hat{ص}$) عندما يكون السعر ٢١ جنيهًا.

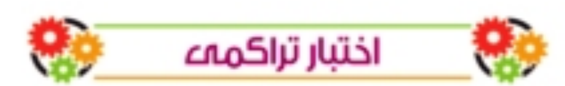
(١٤) **الربط بالرياضة:** الجدول الآتى يعبر عن عُمر أحد الأشخاص وعدد ساعات التمارين التى يمارسها:

العُمر	٢٠	٢٥	٣٣	٣٧	٥٠	٥٨
عدد ساعات التمارين	١٠	٦	٣	٢	١,٥	١

(أ) أوجد معادلة خط الانحدار.

(ب) تنبأ بعدد ساعات التمارين عندما يكون عُمر الشخص ٤٠ سنة .

(جـ) احسب مقدار الخطأ عندما يكون عُمر الشخص ٣٣ سنة .



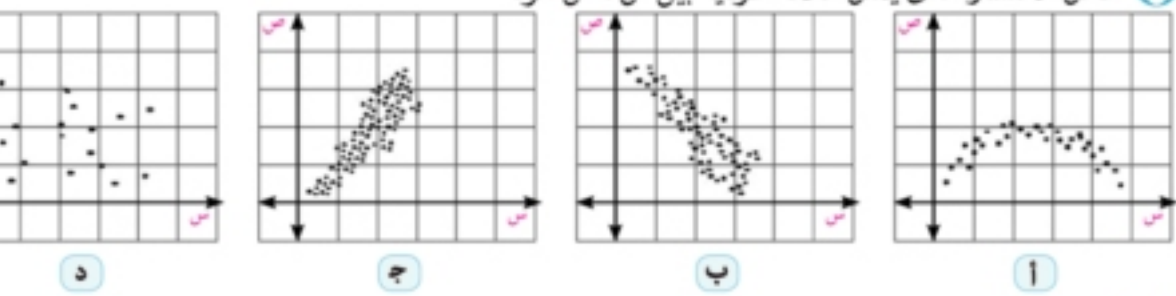
أسئلة ذات اجابات قصيرة:

أولًا : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الآتية (من ١ الى ١٠):

(١) مجموع القيم التى وسطها الحسابى ٨ وعددها ٧ تساوى:

أ ٤٠ ب ٥٦ ج ٦٠ د ٨٠

(٢) شكل الانتشار الذى يمثل علاقة طردية بين س ، ص هو:



(٣) العلاقة بين طول ضلع المربع ومساحته هو ارتباط :

أ طردى قوى. ب عكسى قوى. ج طردى تام. د عكسى تام.

(٤) إذا كان المتغيران يتزايدان معًا أو يتناقصان معًا فإن الارتباط بينهما يكون:

أ طرديًا. ب عكسيًا. ج غير خطيًا. د منعدمًا.

(٥) معامل الارتباط مقياس رقمى تتراوح قيمته بين :

أ [٠ ، ١] ب]-١ ، ١[ج [-١ ، ١] د [-١ ، ١] - {٠}

(٦) يسمى المتغير المطلوب تقديره فى معادلة خط الانحدار بالمتغير:

أ المستقل. ب التابع. ج الطردى. د العكسى.

ثانيًا : تفسير :

(٧) إشارة معامل الانحدار تدل على نوع الارتباط (طردى أو عكسى) فسر هذه العبارة .

أسئلة ذات إجابات طويلة:

(٨) من بيانات الجدول المقابل:

س	٦٥	٦٦	٦٧	٦٧	٦٨	٦٩
ص	٧٠	٧٢	٦٨	٦٤	٦٨	٦٧

أ أوجد معامل الارتباط الخطى بين المتغيرين س ، ص وحدد نوعه

ب تنبأ بقيمة صَ عندما س = ٦٢

ج احسب مقدار الخطأ فى ص إذا كانت س = ٦٦

(٩) الجدول الاتى يبين العلاقة بين عُمر السائق وعدد المخالفات التى حصل عليها خلال عام.

عُمر السائق (س)	٤٥	٢٨	٥٢	٢٤	٥٦	٣٢	٦٣	٣٨
عدد المخالفات (ص)	٤	٧	٢	٧	٢	٥	١	٣

أ أوجد معامل ارتباط الرتب بين س ، ص

ب أوجد معادلة خط انحدار ص على س .

ج قدر صَ إذا كانت س = ٤٠

د احسب مقدار الخطأ فى ص إذا كانت س = ٣٨

الاحتمال الشرطى

Conditional Probability



مقدمة الوحدة

سبق أن علمنا بأن علم الإحصاء هو أحد فروع مادة الرياضيات والذي يهتم بجمع البيانات وترتيبها وتفسيرها بهدف أتخاذ القرارات المناسبة لظاهرة ما، وتعتبر الاحتمالات الخلفية الرياضية للطرق الإحصائية، وقد استخدمها الباحثون منذ القدم لأسباب اجتماعية واقتصادية وصحية وغيرها.

وقد تأسس علم الاحتمال بشكله الحالى على يد عدد كبير من العلماء نذكر منهم العالم الفرنسى (بيير سيمون لابلاس ١٧٤٩ - ١٨٢٧) ومن العلماء الإنجليز (ديمورجان ١٨٠٦ - ١٨٧١) ،(جون ڤن ١٨٣٤ - ١٩٢٣) والعالم الروسى (أندريه ماركوف ١٨٥٦ - ١٩٢٢) وغيرهم.


بيير سيمون لابلاس


ديمورجان


جون ڤن


أندريه ماركوف

ومن الجدير بالذكر أن تطبيقات الإحصاء والاحتمال كثيرة فى مختلف المجالات التربوية والاجتماعية والاقتصادية، وسوف نتناول فى هذه الوحدة دراسة الاحتمال الشرطى بين حدثين ونظرياته وتطبيقاته في مواقف حياتية مختلفة، كما سندرس الأحداث المستقلة وغير المستقلة .



أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف الأحداث المتنافية وغير المتنافية.
- يتعرف الاحتمال الشرطى.
- يستنتج نظريات على الاحتمال الشرطى.
- يتعرف الأحداث المستقلة وغير المستقلة.
- يطبق الاحتمال الشرطى في مواقف حياتية مختلفة.

المصطلحات الأساسية

- الأحداث المتنافية *Mutually Exculusive events*
- أحداث غير متنافية *Events are not mutually exclusive*
- الاحتمال الشرطى *Conditional probability*
- الأحداث المستقلة *Independent Events*
- الأحداث غير المستقلة *Dependent Events*

دروس الوحدة

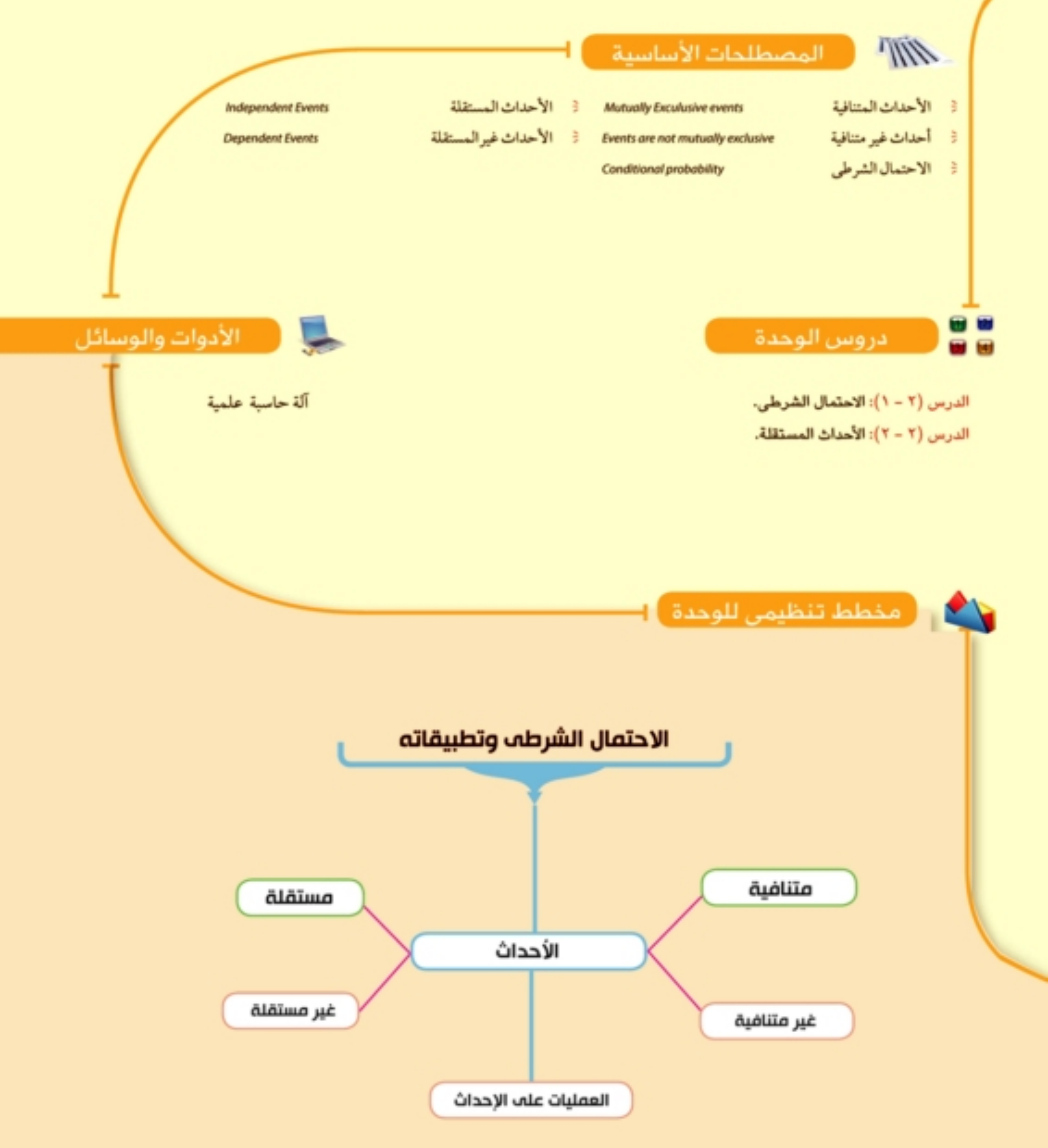
الدرس (٢ - ١): الاحتمال الشرطى.

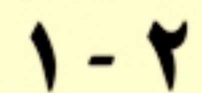
الدرس (٢ - ٢): الأحداث المستقلة.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

مخطط تنظيمى للوحدة





الاحتمال الشرطى

Conditional Probability

سوف تتعلم

- الأحداث المتنافية.
- الأحداث غير المتنافية.
- الاحتمال الشرطى.

المصطلحات الأساسية

- الأحداث المتنافية *Mutually Exclusive Events*
- أحداث غير متنافية *Events are not Mutually Exclusive*
- الاحتمال الشرطى *Conditional probability*

مقدمة:

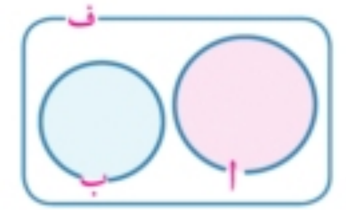
سبق أن درست حساب احتمال حدث ما (وليكن أ) لتجربة عشوائية، وذلك بمعرفة العلاقة بين عدد عناصر هذا الحدث ن(أ) وعدد عناصر فضاء التجربة العشوائية ن(ف) من خلال العلاقة:

$$ل(أ) \text{ (احتمال وقوع الحدث أ) } = \frac{\text{عدد عناصر الحدث ن(أ)}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة ن(ف)}}$$

الأحداث المتنافية: *Mutually Exclusive Events*

علمت من خلال دراستك للاحتمال بأن الأحداث المتنافية هى الأحداث التى لا يمكن وقوعها فى آن واحد، لأن وقوع أحدها يمنع وقوع الأحداث الأخرى، الأمر الذى يعنى عدم وجود عناصر مشتركة للعناصر المكونة لها.

الحدثان المتنافيان:

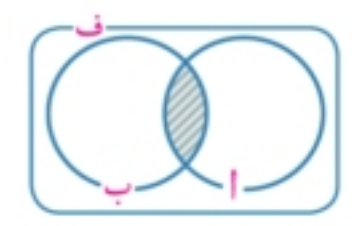


هما الحدثان اللذان لايشتركان فى أى عنصر وتقاطعهما هو المجموعة الخالية ϕ .

فإذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن: أ $\cap$ ب = ϕ

$\therefore$ ل (أ $\cap$ ب) =صفر ويكون ل (أ $\cup$ ب) = ل (أ) + ل (ب)

الحدثان غير المتنافيان: *Events are not Mutually Exclusive*



هما الحدثان اللذان لا يمنع وقوع أحدها وقوع الحدث الآخر (توجد عناصر مشتركة بينهما)

ويكون:

(١) ل (أ $\cup$ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ $\cap$ ب)

(٢) ل ($\acute{أ}$) = ١ - ل (أ)

(٣) ل (أ - ب) = ل (أ) - ل (أ $\cap$ ب)

(٤) ل (أ $\cap$ $\acute{ب}$) = ل (أ - ب) = ل (أ) - ل (أ $\cap$ ب)

(٥) ل ($\acute{أ}$ $\cap$ ب) = ل (ب - أ) = ل (ب) - ل (أ $\cap$ ب)

الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب.

الاحتمال الشرطى *Conditional Probability*

إذا كان أ ، ب حدثين من ف فإنه في بعض الأحيان تتوافر معلومات بأن حدثًا ما مثل ب قد وقع، ل (ب) فى هذه الحالة قد يكون لوقوع الحدث ب تأثير على احتمال وقوع أ و يمكن حساب احتمال وقوع أ بشرط وقوع ب من خلال معرفة العلاقة بين نواتج الحدث أ ونواتج الحدث ب.

مثال تمهيدى: فى تجربة إلقاء قطعة نرد منتظمة مرة واحدة فإن فضاء العينة ف هو:

ف = {١ ، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ، فإذا كان الحدث أ = {١ ، ٢، ٣} هو حدث ظهور عدد أقل من ٤

فمن الواضح أن: ل(أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ف)}$ = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

و إذا كان الحدث ب = {٢، ٤، ٦} هو حدث ظهور عدد زوجى.

لنتساءل الآن: إذا علمنا أن الحدث ب قد وقع بالفعل فما احتمال وقوع الحدث أ ؟

بمعنى آخر، ما احتمال الحصول على رقم زوجى أقل من ٤؟

نلاحظ أن الشرط المعطى يختزل فضاء العينة إلى المجموعة ب = {٢، ٤، ٦}

و يكون الحدث الموافق لظهور رقم زوجى هو أ $\cap$ ب = {٢}

وبالتالى فإن الاحتمال المطلوب هو: $\frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)}$ = $\frac{١}{٦}$ ÷ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٣}$

إن هذا المثال يوضح لنا كيف أن بعض الأحداث تختلف احتمالاتها تبعًا لاختلاف فضاء العينة.



تعلم

الاحتمال الشرطى *Conditional Probability*

إذا كانت ف فضاء العينة لتجربة عشوائية ما وكان أ ، ب حدثين من هذا الفضاء.

فإن احتمال وقوع الحدث أ بشرط وقوع الحدث ب و يرمز له بالرمز ل (أ | ب) و يقرأ احتمال وقوع الحدث أ بشرط وقوع الحدث ب يتحدد بالعلاقة التالية:

$$ل(أ | ب) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)} \quad \text{حيث } ل(ب) > ٠$$

لاحظ أن: الاحتمال الشرطى يتمتع بنفس خواص الاحتمال (غير الشرطى) أى إن:

١- ٠ $\leqslant$ ل (أ | ب) $\leqslant$ ١

٢- ل (ف | ب) = $\frac{ل(ف \cap ب)}{ل(ب)}$ = $\frac{ل(ب)}{ل(ب)}$ = ١

٣- إذا كان $أ_١ \cap أ_٢ = \phi$ فإن ل [($أ_١ \cup أ_٢$) | ب] = ل ($أ_١$ | ب) + ل($أ_٢$ | ب)

مع ملاحظة أن:

- ل (أ | ب) $\neq$ ل (ب | أ)
- ، ل ($\acute{أ}$ | ب) = ١ - ل (أ | ب)
- ، ل (أ $\cap$ ب) = ل (أ|ب) × ل (ب) بشرط ل (ب) > ٠
- ل (أ $\cap$ ب) = ل ((ب | أ) × ل (أ) بشرط ل (أ) > ٠

مثال

الاحتمال الشرطي

(١) أُلقي حجر نرد منتظم مرة واحدة، احسب احتمال ظهور العدد ٢ علمًا بأن العدد الظاهر زوجي؟

الحل

بفرض أن: فضاء العينة ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}، أ = {٢}، ب = {٢، ٤، ٦}

فإن: ل(ب) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ ∩ ب) = ل (أ) = $\frac{١}{٦}$

∵ ل (أ | ب) = $\frac{ل(أ ∩ ب)}{ل(ب)}$

∴ ل (أ | ب) = $\frac{١}{٦}$ ÷ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٦}$ × ٢ = $\frac{١}{٣}$

احتمال ظهور العدد ٢ علمًا بأن العدد الظاهر زوجيًا هو $\frac{١}{٣}$

لاحظ أن

في الاحتمال الشرطي لاحظ أن الحدث الذي يلي كلمات "ما احتمال" هو الحدث الذي نبدأ به، والحدث الذي يلي إحدى الكلمات "علمًا بأن أ، إذا كان أ، إذا علم أ، ....) هو الشرط.

حاول أن تحل

(١) أُلقي حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ، ما احتمال ألَّا يزيد عدد النقاط في الرمية الأولى عن ٤ إذا علمت أن الفرق المطلق بين العددين الظاهرين يساوي ٢؟

مثال

إجراء العمليات

(٢) إذا كان أ ، ب حدثين من الفضاء ف بحيث ل(أ) = ٠,٤٥ ، ل (ب) = ٠,٦ ، ل (ب | أ) = ٠,٨ أوجد:

أ ل (أ ∩ ب) ب ل (أ ∪ ب) جـ ل (أ | ب) د ل (بَ | أ)

الحل

أ ∵ ل (ب | أ) = $\frac{ل (ب ∩ أ)}{ل (أ)}$

∴ ٠,٨ = $\frac{ل(أ ∩ ب)}{٠,٤٥}$ ∴ ل (أ ∩ ب) = ٠,٨ × ٠,٤٥ = ٠,٣٦

ب ∵ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∪ ب) = ٠,٤٥ + ٠,٦ − ٠,٣٦ = ٠,٦٩

جـ ل(أ | ب) = $\frac{ل(أ ∩ ب)}{ل (ب)}$ = $\frac{٠,٣٦}{٠,٦}$ = ٠,٦

لاحظ أن: ل(أ | ب) ≠ ل(ب | أ)

د ل(بَ | أ) = $\frac{ل(بَ ∩ أ)}{ل(أ)}$ = $\frac{ل(أ - ب)}{ل(أ)}$

= $\frac{ل (أ) - ل(أ ∩ ب)}{ل(أ)}$

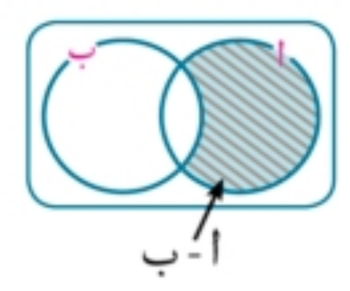
= $\frac{٠,٤٥ - ٠,٣٦}{٠,٤٥}$ = ٠,٢

تذكر أن

ل(ب ∩ أ) = ل(أ ∩ ب)

ل(أ ∪ ب) = ل (أ) + ل(ب) − ل (أ ∩ ب)

ل (أ − ب) = ل(أ) − ل (أ ∩ ب)

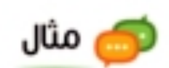


حاول أن تحل

(٢) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف بحيث ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٢٥ ، ل(أ - ب) = ٠,٤٥ أوجد:

أ ل(أ | ب)　　ب ل(ب | أ)

جـ ل(أَ | ب)　　د ل(أَ | بَ)



الجداول التوافقية

(٣) من بيانات الجدول التالى:

الحالة	عدد الأشخاص	
	يلبس نظارة	لا يلبس نظارة
رجل	٨٠٠	٦٠٠
امرأة	٤٠٠	٢٠٠

أوجد احتمال أن تكون امرأة اختيرت عشوائيًّا تلبس نظارة ؟

الحل

نفرض أن: ن(ف) = عدد الأشخاص موضوع الدراسة = ٢٠٠٠ ،

أ حدث أن الشخص المختار إمرأة

، ب حدث أن الشخص المختار يلبس نظارة

$$ل(أ \cap ب) = \frac{٤٠٠}{٢٠٠٠} = \frac{١}{٥}$$

$$ل(ب) = \frac{١٢٠٠}{٢٠٠٠} = \frac{٣}{٥}$$

المطلوب هو: إيجاد احتمال أ علمًا بأن ب قد وقع أى: ل(أ | ب)

$$\because ل(أ | ب) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)}$$

$$\therefore ل(أ | ب) = \frac{١}{٥} \div \frac{٣}{٥} = \frac{١}{٣}$$

احتمال أن تكون امرأة اختيرت عشوائيًّا تلبس نظارة هو $\frac{١}{٣}$

حاول أن تحل

(٣) فى المثال السابق أوجد:

أ أن يكون رجل اختير عشوائيًّا لا يلبس نظارة .

ب أن يكون رجل أو امرأة اختير عشوائيًّا يلبس نظارة .

مثال — الشجرة البيانية

④ حقيبة بها ١٠ كرات بيضاء ، ١٥ كرة حمراء سحبت عشوائيًّا كرتان على التوالى دون إحلال (إرجاع) . ما احتمال أن تكون الكرتان بيضاوين؟

الحل



نلاحظ فى هذا المثال أن سحب الكرات تم على التوالى ، لذلك فهو يخضع للترتيب، أى إن السحبة الثانية للكرة مشروط بحدوث السحبة الأولى.
يمكن تمثيل هذا المثال بمخطط الشجرة البيانية كما هو موضح بالشكل الجانبى.

نفرض أن: أ ترمز لـ حدث أن تكون الكرة الأولى بيضاء

ب ترمز لـ حدث أن تكون الكرة الثانية بيضاء

(ب | أ) ترمز للحدث سحب الكرة الثانية بشرط أن تكون الكرة الأولى قد تم سحبها .

(أ ∩ ب) ترمز للحدث سحب كرتين بيضاوين.

$\because$ ل(ب | أ) = $\frac{\text{ل(ب ∩ أ)}}{\text{ل(أ)}}$

$\therefore$ $\frac{٩}{٢٤}$ = $\frac{\text{(أ ∩ ب)}}{\frac{١٠}{٢٥}}$

$\therefore$ ل (أ ∩ ب) = $\frac{٩}{٢٤} \times \frac{١٠}{٢٥} = \frac{٣}{٢٠}$

احتمال أن تكون الكرتان بيضاوين هو $\frac{٣}{٢٠}$

حاول أن تحل

④ فى المثال السابق أوجد احتمال أن تكون الكرتان حمراوين؟

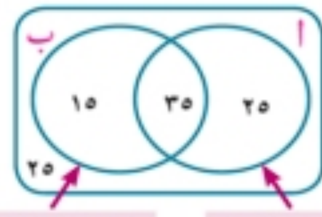
مثال — الربط بالتعليم

⑤ يدرس ١٠٠ طالب فى أحد المعاهد التعليمية لتدريس اللغات، فإذا كان عدد الدارسين للغة الإنجليزية ٦٠ طالبًا وعدد الدارسين للغة الفرنسية ٥٠ طالبًا وعدد الدارسين للغتين معًا ٣٥ طالبًا. اختير أحد الطلاب من هذا المعهد عشوائيًا ، أوجد احتمال أن يكون الطالب دارسًا:

أ أحد اللغتين على الأقل.

ب اللغة الإنجليزية إذا كان دارسًا اللغة الفرنسية.

جـ اللغة الفرنسية إذا كان دارسًا اللغة الإنجليزية.



الحل

يمكن توضيح بيانات المسألة على شكل فن كما هو مبين فى الشكل المقابل.
وبفرض الأحداث الآتية:
الطالب يدرس اللغة الإنجليزية = أ
الطالب يدرس اللغة الفرنسية = ب فإن:

ل(أ) = $\frac{٦٠}{١٠٠}$ = ٠,٦ ، ل(ب) = $\frac{٥٠}{١٠٠}$ = ٠,٥ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{٣٥}{١٠٠}$ = ٠,٣٥

أ احتمال أن يكون الطالب دارسًا أحد اللغتين على الأقل هو ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∪ ب) = ٠,٦ + ٠,٥ - ٠,٣٥ = ٠,٧٥

أى إن احتمال أن يكون الطالب دارسًا احد اللغتين على الأقل هو ٠,٧٥

ب احتمال أن يكون الطالب دارسًا اللغة الإنجليزية إذا كان دارسًا اللغة الفرنسية = ل(أ | ب)

∵ ل(أ | ب) = $\frac{ل(أ ∩ ب)}{ل(ب)}$

∴ ل(أ | ب) = $\frac{٠,٣٥}{٠,٥}$ = ٠,٧

أى إن احتمال أن يكون الطالب دارسًا اللغة الإنجليزية إذا كان دارسًا اللغة الفرنسية هو ٠,٧

جـ احتمال أن يكون الطالب دارسًا اللغة الفرنسية إذا كان دارسًا اللغة الإنجليزية = ل(ب | أ)

∵ ل(ب | أ) = $\frac{ل(ب ∩ أ)}{ل(أ)}$

∴ ل(ب | أ) = $\frac{٠,٣٥}{٠,٦}$ ≃ ٠,٥٨٣

أى إن احتمال أن يكون الطالب دارسًا اللغة الفرنسية إذا كان دارسًا اللغة الإنجليزية هو تقريبًا ٠,٥٨٣

حاول أن تحل

٥ يصوب لاعبان أ ، ب فى وقت واحد نحو هدف ما، فإذا كان احتمال أن يصيب اللاعب أ الهدف = $\frac{٢}{٥}$، واحتمال أن يصيب اللاعب ب الهدف = $\frac{١}{٤}$، واحتمال أن يصيب اللاعبان أ ، ب معًا الهدف = $\frac{١}{١٠}$، أوجد احتمال:

أ إصابة الهدف

ب إصابة الهدف من اللاعب أ إذا تم إصابته من اللاعب ب .

جـ إصابة الهدف من اللاعب ب إذا تم إصابته من اللاعب أ .

تمـــارين (٢ - ١)

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) في تجربة إلقاء قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين، احتمال ظهور كتابة في الرمية الثانية إذا ظهرت صورة في الرمية الأولى تساوي:

أ $\frac{١}{٤}$ ب $\frac{١}{٢}$ جـ $\frac{٣}{٤}$ د ١

(٢) في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة ، احتمال ظهور عدد زوجي أولي إذا ظهر عدد أكبر من ١ هو:

أ $\frac{١}{٥}$ ب $\frac{٢}{٥}$ جـ $\frac{٣}{٥}$ د $\frac{٤}{٥}$

(٣) في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة ، احتمال ظهور العدد ٣ علمًا بأن العدد الظاهر فردي هو:

أ $\frac{١}{٤}$ ب $\frac{١}{٣}$ جـ $\frac{١}{٢}$ د $\frac{٣}{٤}$

(٤) إذا كان ل(أ ∩ ب) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل(أ) = $\frac{٤}{٥}$ فإن ل(ب | أ) =

أ $\frac{١}{٢}$ ب $\frac{٨}{٢٥}$ جـ $\frac{١}{٤}$ د $\frac{٢}{٥}$

(٥) إذا كان ل(أ | ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل(ب) = $\frac{١٢}{٢٥}$ فإن ل(أ ∩ ب) =

أ $\frac{٤}{٢٥}$ ب $\frac{١}{٤}$ جـ $\frac{٢٥}{٣٦}$ د $\frac{١٦}{٢٥}$

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(٦) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف بحيث كان ل(أ) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٧ ، ل(أ | ب) = ٠,٣ أوجد:

أ ل(أ ∩ ب) ب ل(أ ∪ ب) جـ ل(ب | أ) د ل(أ | بَ)

(٧) إذا كان ل(أَ) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٥ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٨ أوجد ل(أ | بَ)

(٨) إذا كان ل(ب | أ) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل(ب | أَ) = $\frac{٤}{٧}$ ، ل(أ) = $\frac{٣}{٥}$ أوجد

أ ل(أ ∩ ب) ب ل(أ ∪ ب)

(٩) أُلقي حجر نرد مرة واحدة . احسب احتمال أن يكون العدد الظاهر عددًا أوليًا بشرط أن يكون العدد الظاهر عددًا فرديًا .

(١٠) في تجربة إلقاء حجري نرد متمايزين مرة واحدة أوجد احتمال أن يكون:

أ العدد الظاهر على الحجر الثاني يساوي ٤، علمًا بأن العدد الظاهر على الحجر الأول يساوي ٢ .

ب مجموع العددين الظاهرين زوجيًا علمًا بأن العدد الظاهر على الحجر الأول يساوي ٦.

(١١) إذا كان احتمال نجاح طالب في امتحان هو ٠,٧ واحتمال سفره للخارج إذا نجح هو ٠,٦ فما احتمال نجاحه وسفره للخارج؟

(١٢) فصل دراسى به ٤٥ طالبًا منهم ٢٧ يدرسون اللغة الفرنسية ،١٥ يدرسون اللغة الألمانية ، ٩ يدرسون اللغتين معًا، اختير طالب من هذا الفصل عشوائيًا ، احسب احتمال أن يدرس الطالب المختار:

أ مادة واحدة على الأقل من المادتين.

ب يكون دارسًا اللغة الفرنسية إذا كان دارسًا اللغة الألمانية.

جـ يكون دارسًا اللغة الألمانية إذا كان دارسًا اللغة الفرنسية.

(١٣) أُلقي حجرا نرد متمايزان مرة واحدة ، أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية:

أ ظهور العدد ٢ على الوجهين معا علمًا بأن العدد نفسه ظهر على كل منهما.

ب ظهور العدد ٥ على الوجهين علمًا بأن العددين الظاهرين كل منهما يزيد عن ٤ .

جـ عدم ظهور العدد ٣ على أى من الوجهين علمًا بأن العددين الظاهرين فرديان.

(١٤) لعبة الدوارة: رُقِّمت قطاعات دائرية متساوية من ١ إلى ٨ فى لعبة الدوارة . ما احتمال أن يستقر المؤشر عند العدد ٥ إذا عُلم انه أستقر عند عدد فردى؟



(١٥) يبين الجدول التالى أعداد الفرق الرياضية المشاركة فى الألعاب الرياضية المختلفة:

اللعبة الرياضية	كرة اليد	كرة القدم	الكرة الطائرة	كرة السلة	كرة الهوكى
عدد الفرق المشاركة	٤	١٠	٦	٧	٣

إذا اختيرت إحدى هذه الألعاب عشوائيًا فما احتمال أن تكون من ألعاب:

أ كرة الهوكى علمًا بأنها ليست من ألعاب الكرة الطائرة .

ب كرة السلة علمًا بأنها ليست من ألعاب كرة القدم وليست من ألعاب كرة اليد .

(١٦) اختيرت عينة عشوائية مكونة من ٣٠ طالبًا و ٢٠ طالبة للمشاركة فى الإجابة عن الاقتصاد واستهلاك الطاقة فكانت إجاباتهم على النحو التالى:

الإجابة	نعم	لا	غير متأكد	المجموع
طلاب	٢٠	٦	٤	٣٠
طالبات	١٥	٣	٢	٢٠

فإذا اختير أحد أفراد العينة عشوائيًا، فما احتمال أن يكون الشخص المختار "طالبة" إجابتها نعم؟

(١٧) صندوق يحتوى على ٥ كرات بيضاء ، ٧ كرات سوداء. سُحبت كُرتان منه على التوالى دون إحلال (دون إرجاع) ، أوجد احتمال:

أ أن تكون الكرة الثانية بيضاء إذا كانت الكرة الأولى بيضاء.

ب أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية بيضاء.

جـ أن تكون الكرة الثانية سوداء و الكرة الأولى بيضاء.

(١٨) يتنافس كريم وزياد فى الترشح لرئاسة اتحاد طلاب المدرسة ضمن ثلاثة صفوف دراسية، والجدول التالى يمثل الأصوات التى حصل عليها كل منهم:

	الصف الأول	الصف الثانى	الصف الثالث	المجموع
كريم	١٩٦	١٧٤	١٣٠	٥٠٠
زياد	٢٤٠	١٦٥	١٣٥	٥٤٠

فإذا اختير طالب من طلاب المدرسة عشوائيًّا فما احتمال أن يكون الطالب:

أ انتخب المرشح "كريم" علمًا بأنه من طلاب الصف الثالث؟

ب انتخب المرشح "زياد" علمًا بأنه من طلاب الصف الثانى ؟

(١٩) أُعلن عن وظيفة تقدم لها ١٠٠ شخص، رُتبت بياناتهم كالآتى:

مؤهلون		
	متزوج	أعزب
ذكر	٤٠	١٠
أنثى	١٠	١٠

غير مؤهلين		
	متزوج	أعزب
ذكر	٣	١٢
أنثى	١٠	٥

أ احسب احتمال أن يكون الموظف المختار متزوجًا بشرط أن يكون مؤهلًا.

ب احسب احتمال أن يكون الموظف المختار متزوجًا ومؤهلًا.

جـ احسب احتمال أن يكون الموظف المختار متزوجًا بشرط أن يكون غير مؤهل.

(٢٠) فى اختبار آخر العام وجد أن ٣٠٪ من الطلبة رسبوا فى الكيمياء، ٢٠٪ رسبوا فى الفيزياء ، ١٥ ٪ رسبوا فى الكيمياء والفيزياء. اختير أحد الطلبة عشوائيًّا.

أ إذا كان الطالب المختار راسبًا فى الكيمياء، فما احتمال رسوبه فى الفيزياء؟

ب إذا كان الطالب المختار راسبًا فى الفيزياء، فما احتمال رسوبه فى الكيمياء؟

جـ أوجد احتمال رسوبه فى الكيمياء بشرط عدم رسوبه فى الفيزياء؟

د أوجد احتمال نجاحه فى الفيزياء بشرط نجاحه فى الكيمياء؟

(٢١) نشاط: استخدام شكل ڤن:

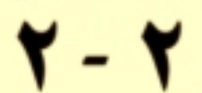
أ ، ب حدثان في فضاء العينة ف حيث ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٤ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٢

أ مَثِّل المجموعات السابقة بشكل ڤن واكتب على الرسم احتمالات وقوعها .

ب أوجد احتمالات الأحداث الآتية:

أولًا: وقوع الحدث أ بشرط عدم وقوع الحدث ب.

ثانيًا: وقوع الحدث ب بشرط عدم وقوع الحدث أ.



الأحداث المستقلة

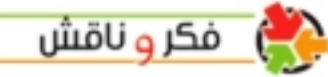
Independent Events

سوف تتعلم

- الأحداث المستقلة.
- الأحداث غير المستقلة .

المصطلحات الأساسية

- الأحداث المستقلة *Independent Events*
- الأحداث غير المستقلة *Dependent Events*



فكر و ناقش

تأمل الأمثلة الآتية:

١- إلقاء قطعة نقود وحجر نرد مرة واحدة.

٢- نجاح طالب في مقرر الرياضيات ونجاحه في مقرر الكيمياء.

٣- سُحبت كرة عشوائيًا من كيس به ١٠ كرات ثم أعيدت إلى الكيس، ثم سُحبت كرة ثانية.

٤- نجاح طالب في الامتحان العملي للفيزياء ونجاحه في مقرر الفيزياء.

٥- سَحْبُ كرة عشوائيًا من كيس به ١٠ كرات دون إعادتها، ثم سحب كرة ثانية.

ماذا تلاحظ؟

نلاحظ من الأمثلة الثلاثة الأولى أن:

١- النواتج في قطعة النقود لا تؤثر في النواتج في حجر النرد .

٢- نجاح الطالب في الرياضيات أو رسوبه فيها لا يؤثر في نجاحه أو رسوبه في الكيمياء.

٣- إعادة الكرة الأولى إلى الكيس بعد سحبها لا يغير من عدد الكرات، وبالتالي فإن السحبة الأولى لا تؤثر في السحبة الثانية.

لذلك فإن الأحداث فى كل مثال من الأمثلة الثلاثة السابقة تُعرف بالأحداث المستقلة.

٤- نجاح الطالب فى الامتحان العملي للفيزياء يؤثر في نجاحه فى مقرر الفيزياء.

٥- عند سحب كرة من كيس دون إعادتها إليه يؤثر في عدد الكرات الموجودة فى الكيس، وبالتالى فإن السحبة الأولى تؤثر في السحبة الثانية.

لذلك فإن الأحداث فى المثالين (٤) ، (٥) تعرف بالأحداث غير المستقلة



تعلم

الحدثان المستقلان



تعريف: **يقال إن الحدثين أ، ب مستقلان إذا وإذا فقط ل (أ ∩ ب) = ل (أ) × ل (ب).**

أى إن احتمال وقوع حدثين مستقلين معًا يساوى احتمال وقوع الحدث الأول مضروبًا فى احتمال وقوع الحدث الثانى.

الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب.

ويُلاحظ أنه إذا كان الحدثان أ ، ب مستقلين وكان ل(ب) $\neq$ صفر

فإن ل(أ | ب) = ل (أ)   أى إن وقوع أحد الحدثين لا يؤثر في احتمال وقوع الحدث الآخر.

فمثلًا: أُلقيت قطعة نقود منتظمة مرتين ولوحظ تتابُع حدوث الصورة والكتابة ،

فإن: ف = {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص) ، (ك، ك)}

لذا فإن احتمال أى من تلك النتائج = $\frac{١}{٤}$

بفرض أن الحدث أ يمثل ظهور الكتابة فى المرة الثانية = {(ص ، ك) ، (ك ، ك) }

والحدث ب يمثل ظهور الصورة فى المرة الأولى = {(ص ، ص) ، (ص ، ك)}

فإن ل (أ | ب) = $\frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)}$ = $\frac{\frac{١}{٤}}{\frac{١}{٢}}$ = $\frac{١}{٢}$ = ل (أ)

أى إن حدوث الحدث ب لم يؤثر على احتمال حدوث الحدث أ بمعنى أن احتمال أ لا يعتمد على معلومية أن الحدث ب، قد وقع لذا نقول إن الحدثين أ ، ب مستقلان.

لاحظ أن: الحدثين المتنافيين أ ، ب يكونان مستقلين إذا و إذا فقط ل (أ) × ل (ب) = صفر بمعنى إذا و إذا فقط كان احتمال أ أو احتمال ب مساويًا صفر.

مثال

(١) في تجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة ثم إلقاء حجر نرد. ما احتمال ظهور صورة والعدد ٥؟

الحل

يمكن استخدام الشجرة البيانية لكتابة فضاء العينة: نلاحظ أن إلقاء قطعة النقود لا يؤثر في نواتج العينة لإلقاء حجر النرد ، لذلك فإن الحدثين مستقلان. وبفرض أن:

أ = حدث ظهور صورة. فإن ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ب = حدث ظهور العدد ٥. فإن ل(ب) = $\frac{١}{٦}$

$\because$ ل (أ $\cap$ ب) = ل (أ) × ل (ب) $\therefore$ ل (أ $\cap$ ب) = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٦}$ = $\frac{١}{١٢}$

$\therefore$ احتمال ظهور صورة و العدد ٥ هو $\frac{١}{١٢}$

ملاحظة: يمكن إيجاد احتمال ظهور صورة والعدد ٥ مباشرة بكتابة فضاء العينة كما هو موضح بالشكل التالى:



ف = {(ص ، ١) ، (ص ، ٢) ، (ص ،٣) ، (ص ، ٤) ، (ص ، ٥) ، (ص ، ٦) ، (ك ، ١) ، (ك ، ٢) ، (ك ، ٣) ، (ك ، ٤)، (ك ، ٥) ، (ك ، ٦) }

حدث ظهور صورة والعدد ٥ = {(ص ، ٥)}   ويكون احتمال ظهور صورة و العدد ٥ = $\frac{١}{١٢}$

حاول أن تحل

(١) فى المثال السابق أوجد احتمال ظهور كتابة وعدد أولى؟

مثال

٢ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف وكان ل(أ) = ٠,٥ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٨ .
بين مع ذكر السبب هل أ ، ب حدثان مستقلان؟

الحل

∵ ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل(ب) - ل (أ ∪ ب)

∴ ل (أ ∩ ب) = ٠,٥ + ٠,٦ − ٠,٨ = ٠,٣ (١)

∵ ل(أ) × ل(ب) = ٠,٥ × ٠,٦ = ٠,٣ (٢)

من (١) ، (٢) يكون أ ، ب حدثين مستقلين.

لاحظ أن: لإيضاح الفرق بين الحدثين المتنافيين والمستقلين نأخذ المثال التالي:

نعلم أنه عند إلقاء قطعة نقود معدنية منتظمة مرة واحدة فإن فضاء العينة ف = {ص، ك}

كما نعلم أن ل (ص) = $\frac{1}{2}$ ، ل (ك) = $\frac{1}{2}$

ونعلم أيضًا أن الحدثين ص ، ك حدثان متنافيان لأن حدوث أحدهما ينفي حدوث الآخر .

∴ ل (ص ∩ ك) = صفر ، ∴ ل (ص ∩ ك) ≠ ل(ص) × ل (ك)

أي أنه ص ، ك حدثان متنافيان إلا أنهما غير مستقلين.

حاول أن تحل

٢ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف حيث ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}
وكان أ = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦} ، ب = {١ ، ٤ ، ٥ ، ٦} هل أ ، ب حدثان مستقلان؟ وضح ذلك.

مثال

٣ الربط بالتأمين أمّنَ رجل وزوجته على حياتيهما في إحدى شركات التأمين على الحياة فإذا قدرت الشركة احتمال أن يعيش الرجل أكثر من ٢٠ عامًا هو ٠,٢ واحتمال أن تعيش زوجته أكثر من نفس المدة ٠,٣ أوجد احتمال أن:

أ يعيش الرجل وزوجته معًا أكثر من ٢٠ عامًا. ب يعيش أحدهما على الأقل أكثر من ٢٠ عامًا.

جـ يعيش أحدهما فقط أكثر من ٢٠ عامًا.

الحل

نفرض أن: أ حدث أن يعيش الرجل أكثر من ٢٠ عاماً ل(أ) = ٠,٢ ،

ب حدث أن تعيش الزوجة أكثر من ٢٠ عاماً ل(ب) = ٠,٣

أ احتمال أن يعيش الرجل وزوجته معًا أكثر من ٢٠ عامًا = ل (أ ∩ ب)

∵ ل (أ ∩ ب) = ل (أ) × ل(ب) ∴ ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ × ٠,٣ = ٠,٠٦

ب احتمال أن يعيش أحدهما على الأقل أكثر من ٢٠ عامًا = ل(أ ∪ ب)

∵ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب) ∴ ل (أ ∪ ب) = ٠,٢ + ٠,٣ − ٠,٠٦ = ٠,٤٤

ج ∵ احتمال أن يعيش أحدهما فقط أكثر من ٢٠ عامًا = ل (أ ∪ ب) - ل (أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∪ ب) - ل(أ ∩ ب) = ٠,٤٤ - ٠,٠٦ = ٠,٣٨

حاول أن تحل

٣ **الربط بالرماية:** أطلق جنديان أ ، ب قذيفة نحو هدف ما، فإذا كان احتمال أن يصيب أ الهدف هو ٠,٦ وكان احتمال إصابة ب نفس الهدف ٠,٥ أوجد احتمالات الأحداث الآتية:

أ إصابة الهدف من الجندي أ والجندي ب معًا.
ب إصابة الهدف بقذيفة واحدة على الأقل.
ج إصابة الهدف بقذيفة واحدة فقط.
د عدم إصابة الهدف.

مثال

٤ **السحب مع الإحلال:** كيس يحتوي على ٦ كرات زرقاء و ٤ كرات حمراء، إذا سُحبت كرة عشوائيًا ثم أُعيدت إلى الكيس، ثم سُحبت كرة ثانية، ما احتمال أن تكون:

أ الكرتان حمراوين في المرتين؟
ب الكرتان زرقاوين في المرتين؟
ج الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء؟
د إحداهما حمراء والأخرى زرقاء؟

الحل

أ طالما أن سحب الكرة مع الإحلال (الإرجاع) فيكون **الحدثان مستقلين.**

وبفرض أن: ف = فضاء العينة ، أ = سحب الكرة في المرة الأولى ، ب = سحب الكرة في المرة الثانية

∴ ن (ف) = ١٠ ، ل (أ) = $\frac{٤}{١٠}$ ، ل(ب) = $\frac{٤}{١٠}$ **(لأن السحب مع الاحلال)**

∵ ل (أ ∩ ب) = ل (أ) × ل (ب) ∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{٤}{١٠} \times \frac{٤}{١٠} = \frac{١٦}{١٠٠} = \frac{٤}{٢٥}$

بنفس الطريق السابقة يكون:

ب احتمال أن تكون الكرتان زرقاوين في المرتين = $\frac{٦}{١٠} \times \frac{٦}{١٠} = \frac{٣٦}{١٠٠} = \frac{٩}{٢٥}$

ج احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء = $\frac{٤}{١٠} \times \frac{٦}{١٠} = \frac{٢٤}{١٠٠} = \frac{٦}{٢٥}$

د احتمال أن تكون إحداهما حمراء والأخرى زرقاء = احتمال الأولى حمراء والثانية زرقاء + احتمال الأولى زرقاء والثانية حمراء

$= \frac{٤}{١٠} \times \frac{٦}{١٠} + \frac{٦}{١٠} \times \frac{٤}{١٠} = \frac{١٢}{٢٥}$

حاول أن تحل

٤ إذا كان احتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم في الدولة (أ) يساوي ٠,٨٤ واحتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم في الدولة (ب) يساوي ٠,٧٥ ما احتمال أن يرتفع مؤشر سوقي أسهم الدولتين أ ، ب؟



تعلم الأحداث غير المستقلة *Dependent events*

يكون أ ، ب حدثين غير مستقلين إذا كان: **ل (أ ∩ ب) ≠ ل (أ) × ل (ب)**

لأننا نعلم من تعريف الاحتمال الشرطي أن:

ل (أ | ب) = $\frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)}$ بشرط ل (ب) ≠ ٠

، ل (ب | أ) = $\frac{ل(ب \cap أ)}{ل(أ)}$ بشرط ل (أ) ≠ ٠

أي إنه يمكن كتابة ل (أ ∩ ب) = ل (أ | ب) × ل (ب)

= ل (ب | أ) × ل (أ) بشرط أن ل (أ) ≠ ٠ ، ل (ب) ≠ ٠

بمعنى أن الحدثين أ ، ب يكونان غير مستقلين إذا كان احتمال حدوث أحدهما يؤثر بطريقة ما في احتمال حدوث الآخر.

احتمال الأحداث غير المستقلة

مثال

٥ إذا كان ف فضاء العينة لتجربة عشوائية حيث ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨} وكان أ = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٨}، ب = {٢ ، ٥ ، ٦ ، ٧} هل أ ، ب مستقلان؟ وضح إجابتك.

الحل

∵ ن(أ) = ٤ ∴ ل (أ) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$ ، ∵ ن (ب) = ٤ ∴ ل (ب) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

∵ أ ∩ ب = {٢} ∴ ل(أ∩ب) = $\frac{١}{٨}$ (١)

∵ ل (أ) × ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٤}$ (٢)

من (١) ، (٢) ل (أ ∩ ب) ≠ ل(أ) × ل(ب) لذلك فإن أ ، ب حدثان غير مستقلين.

حاول أن تحل

٥ إذا كان جـ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧} هل ب ، جـ مستقلان؟ وضح اجابتك.

السحب بدون إحلال

مثال

٦ كيس يحتوي على ٦ كرات زرقاء و ٤ كرات حمراء، إذا سُحبت كرتان الواحدة وراء الأخرى دون إحلال (دون إرجاع) ، ما احتمال أن تكون:

أ الكرتان حمراوين؟ ب الكرتان زرقاوين؟ جـ الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء؟

الحل

هذا المثال هو نفس مثال (٣) باختلاف أن سحب الكرات بدون إحلال (دون إرجاع) ، لذلك يكون الحدثان غير مستقلين.

أ إذا كانت الكرتان حمراوين فإن:

احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية حمراء =

احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء × احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء بعد سحب الكرة الحمراء الأولى

= $\frac{٤}{١٠}$ × $\frac{٣}{٩}$ = $\frac{٢}{١٥}$

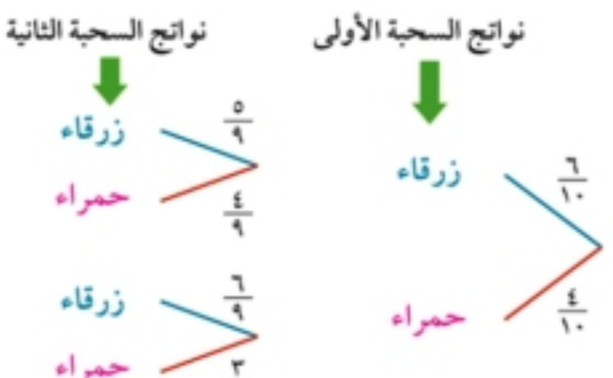
ب إذا كانت الكرتان زرقاوين فإن: احتمال أن تكون الكرة الأولى زرقاء والثانية زرقاء = $\frac{٦}{١٠} \times \frac{٥}{٩} = \frac{١}{٣}$

ج احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء =

احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء × احتمال أن تكون الكرة الثانية زرقاء بشرط أن تكون الأولى حمراء

= $\frac{٤}{١٠} \times \frac{٦}{٩} = \frac{٤}{١٥}$

يمكن استخدام الشجرة البيانية كما هو موضح بالشكل لإيجاد نواتج الأحداث غير المستقلة.



حاول أن تحل

٦ كيس يحتوي على ٣ كرات حمراء و ٥ كرات سوداء إذا سُحبت كرتان الواحدة وراء الأخرى دون إحلال (إرجاع)، ما احتمال أن تكون:

أ الكرتان سوداوين؟ ب الأولى سوداء والثانية حمراء؟ ج إحدى الكرتين حمراء والأخرى سوداء؟

تمارين ٢ - ٢

١ أى من الأحداث التالية مستقلة وأيها غير مستقلة؟ فسر إجابتك:

أ إلقاء قطعة نقود معدنية، ثم إلقاء حجر نرد مرة واحدة.

ب سحب بطاقة من صندوق بدون إحلال، ثم سحب بطاقة أخرى من نفس الصندوق.

ج سحب بطاقة من صندوق مع الإحلال، ثم سحب بطاقة أخرى من نفس الصندوق.

د تأهل فريق كرة القدم إلى دور الأربعة، فإذا ربح فسوف يلعب فى مباراة البطولة.

هـ اختيار أحد الأسماء بالقرعة دون إحلال (إرجاع)، ثم اختيار اسمًا آخر.

و اختيار كرة من كيس ووضعها فى مكان آخر، ثم اختيار كرة أخرى من نفس الكيس.

ز تقدم كريم فى المسابقة الثقافية يوم الاثنين ونجح فيها، وتقدم للمسابقة العلمية يوم الخميس ونجح فيها أيضا.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٢ إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٦ فإن ل(أ ∪ ب) =

أ ٠,١٢ ب ٠,٣٢ ج ٠,٦٨ د ٠,٨

٣ إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٢٥ ، ل(ب) = ٠,٤ فإن ل(أ - ب) =

أ ٠,١ ب ٠,١٥ ج ٠,٣ د ٠,٦٥

④ إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = س ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٧٢ فإن س تساوى:

أ ٠,٢٤ ب ٠,٢٨ ج ٠,٤ د ٠,٦

⑤ إذا أُلقيت قطعة نقود ثم أُلقي حجر نرد مرة واحدة. فما احتمال ظهور صورة والعدد ٣؟

⑥ إذا أُلقيت قطعة نقود أربع مرات متتالية. فما احتمال الحصول على كتابة أربع مرات؟

⑦ أُلقي حجر نرد منتظم مرة واحدة، فإذا كان أ حدث ظهور عدد زوجي ، ب حدث ظهور عدد مربع. هل أ ، ب حدثان مستقلان؟ فسر إجابتك.

⑧ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل(ب) = ٠,٣ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٥ أوجد قيمة ل (أ) إذا كان أ ، ب:

أ حدثين متنافيين. ب حدثين مستقلين .

⑨ يحتوي كيس على مجموعة من البلي موزعة على النحو التالي ٢ حمراء ، ٣ خضراء واحدة زرقاء. اختيرت عشوائيًّا بلية واحدة مع الإحلال، ثم اختيرت بلية ثانية. اوجد احتمال إن تكون البليتان المختاران خضراوين؟

⑩ **فى السؤال السابق**: إذا اختيرت عشوائيًّا بلية واحدة بدون إحلال ثم اختيرت بلية ثانية ، أوجد احتمال أن تكون الأولى زرقاء والثانية خضراء.

⑪ يحتوى كيس على الكرات التالية: ٦ حمراء ، ٤ برتقالية ، ٣ صفراء ، ٢ زرقاء و ٥ خضراء. اختيرت كرة عشوائيًّا بدون إحلال (إرجاع) ثم اختيرت كرة ثانية.

أوجد احتمال أن تكون الكرات المسحوبة:

أ حمراء و زرقاء. ب حمراء و صفراء. ج حمراء و حمراء. د برتقالية و زرقاء.

⑫ يصوب جنديان أ ، ب طلقة واحدة نحو هدف ما ، فإذا كان احتمال أن يصيب الجندي الأول الهدف هو ٠,٤ واحتمال أن يصيب الجندى الثانى الهدف هو ٠,٧.

أولًا: أوجد احتمال أن:

أ يصيب الجنديان الهدف معًا. ب يصيب أحدهما الهدف على الأقل.

ج يصيب أحدهما فقط الهدف. د يصيب أحدهما الهدف على الأكثر.

ثانيًا: إذا علمت أن أحدهما على الأقل أصاب الهدف، فأوجد احتمال أن يكون الجندى أ فقط قد أصاب الهدف.

⑬ إذا كان أ، ب حدثان مستقلان فاثبت أن كل من أزواج الأحداث الآتية يكون أيضا مستقلا

أ أَ، بَ ب أَ، ب ج أ، بَ

ملخص الوحدة

١ **حساب احتمال حدث ما (وليكن أ)**

$$ل(أ) \text{ (احتمال وقوع الحدث أ)} = \frac{\text{عدد عناصر الحدث ن(أ)}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة ن(ف)}}$$

٢ **الحدثان المتنافيان:** هما الحدثان اللذان لايشتركان فى أى عنصر وتقاطعهما هو المجموعة الخالية ϕ.

فإذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن: $أ \cap ب = \phi$

$\therefore$ $ل(أ \cap ب)$ = صفر ويكون $ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب)$

٣ **الحدثان غير المتنافيان:** هما الحدثان اللذان لا يمنع وقوع أحدها من وقوع الحدث الآخر (توجد عناصر مشتركة بينهما)، ويكون: $ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب)$

٣ **الاحتمال الشرطى:** إذا كانت ف فضاء العينة لتجربة عشوائية ما وكان أ ، ب حدثين من هذا الفضاء. فإن احتمال وقوع الحدث أ بشرط وقوع الحدث ب ويرمز له بالرمز ل (أ | ب) ويقرأ احتمال وقوع الحدث أ بشرط وقوع الحدث ب يتحدد بالعلاقة التالية:

$$ل(أ | ب) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)} \quad \text{حيث } ل(ب) > ٠$$

٤ **الحدثان المستقلان :** يقال إن الحدثين أ، ب مستقلان إذا و إذا فقط $ل(أ \cap ب) = ل(أ) \times ل(ب)$.

أى إن احتمال وقوع حدثين مستقلين معًا يساوى احتمال وقوع الحدث الأول مضروبًا فى احتمال وقوع الحدث الثانى.

ويُلاحظ أنه إذا كان الحدثان أ ، ب مستقلين وكان $ل(ب) \neq$ صفر

فإن $ل(أ | ب) = ل(أ)$

أى إن وقوع أحد الحدثين لا يؤثر في احتمال وقوع الحدث الآخر.

٥ **الأحداث غير المستقلة :**

يكون أ ، ب حدثين غير مستقلين إذا كان: $ل(أ \cap ب) \neq ل(أ) \times ل(ب)$

لأننا نعلم من تعريف الاحتمال الشرطى أن:

$ل(أ | ب) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)}$ بشرط $ل(ب) \neq ٠$ ، $ل(ب | أ) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)}$ بشرط $ل(أ) \neq ٠$

أى إنه يمكن كتابة $ل(أ \cap ب) = ل(أ | ب) \times ل(ب)$

$= ل(ب | أ) \times ل(أ)$ بشرط أن $ل(أ) \neq ٠$ ، $ل(ب) \neq ٠$

بمعنى أن: الحدثين أ ، ب يكونان غير مستقلين إذا كان احتمال حدوث أحدهما يؤثر بطريقة ما في احتمال حدوث الآخر.

تمـــارين عامة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) إذا كان أ، ب حدثين متنافيين وكان ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب′) = ٠,٦ فإن ل(أ ∪ ب) =

أ ٠,٤ ب ٠,٦ جـ ٠,٨ د ١,٢

٢) إذا كان أ ⊂ ب وكان ل (أ′) = $\frac{٧}{١٠}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ فإن ل (أ | ب) تساوي:

أ $\frac{١}{٥}$ ب $\frac{٣}{٥}$ جـ $\frac{٤}{٥}$ د $\frac{٣}{٢٠}$

٣) إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان ل (أ) = ٠,٢ ، ل (ب) = ٠,٥ فإن ل(أ ∩ ب) =

أ ٠,٧ ب ٠,٤ جـ ٠,٣ د ٠,١

٤) إذا كانت ف = {أ ، ب ، جـ} وكان أ ، ب ، جـ أحداث متنافية حيث ل (أ) = ٠,٢٥ ، ل(ب) = ٠,٤ فإن ل(جـ) =

أ ٠,١ ب ٠,١٥ جـ ٠,٣٥ د ٠,٦٥

٥) إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين من ف حيث ل(ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٦٨ فإن ل (أ) =

أ ٠,٢ ب ٠,٣ جـ ٠,٤ د ٠,٥

٦) في تجربة سحب كرة عشوائيًا من صندوق يحوي ١٠ كرات حمراء تحمل الأعداد من ١ إلى ١٠، ٥ كرات زرقاء تحمل الأرقام الفردية من ١ إلى ٩. سُحبت كرة عشوائيًا من الصندوق فوجدت إنها حمراء، فما احتمال أنها تحمل الرقم ٩؟

٧) إذا رسب ٢٥٪ من طلبة أحد الصفوف بمدرسة ما في الرياضيات، ورسب ١٠٪ منهم في الرياضيات والكيمياء. إذا اختير طالب عشوائيًا، ما احتمال رسوبه في الكيمياء إذا كان راسبًا في الرياضيات؟

٨) الربط بالأسرة: عائلة لديها ثلاثة أطفال ، فإذا كان:

أ: حدث أن يكون لدى العائلة أطفال ذكورًا و إناثًا ب: حدث أن يكون لدى العائلة ولد واحد على الأكثر.

هل الحدثان أ ، ب مستقلان؟ وضح إجابتك.



٩) أُلقي حجر نرد منتظم مرة واحدة ثم أُديرت الدائرة الموضحة بالشكل الجانبي. أوجد احتمالات ظهور الأحداث الآتية:

أ ل(العدد ٣ ثم القطاع الأخضر) ب ل(عدد أولي ثم القطاع الأزرق)

جـ ل(العدد ٥ ثم القطاع الأصفر) د ل(عدد زوجي القطاع الأخضر)

١٠) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان:

ل (أ - ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٨}$ ، أوجد: ل (أ) ، ل (ب) ، ل(أ′ ∪ ب′)

١١) أُلقي حجرا نرد منتظم مرتين متتاليتين. أوجد احتمال:

أ ظهور العدد ٥ على أحد الوجهين علمًا بأن العدد نفسه ظهر عليهما.

ب ظهور العدد ٤ على أحد الوجهين علمًا بأن العددين الظاهرين كل منهما يزيد عن ٣.

جـ عدم ظهور العدد ٣ على أي من الوجهين علمًا بأن العددين الظاهرين فرديان.

١٢ في إحدى المسابقات أُعطي سؤال لمتسابقين أ ، ب فإذا كان احتمال حل المتسابق أ للسؤال ٠,٦ واحتمال حل المتسابق ب لنفس السؤال ٠,٨ فأوجد الاحتمالات الآتية:

أ حل السؤال من ب و أ معًا. ب حل السؤال من أحدهما على الأقل. جـ عدم حل السؤال.

١٣ يحتوى كيس على ٢٦ بطاقة منها ١٠ بطاقات حمراء ، ١٦ بطاقة خضراء، سُحبت بطاقتان عشوائيًّا الواحدة تلو الأخرى دون إحلال (دون إرجاع) ما احتمال أن تكون:

أ الكرتان حمراوين؟ ب الكرتان خضروين؟

جـ الكرة الأولى حمراء والثانية خضراء؟ د الكرة الأولى خضراء والثانية حمراء؟

١٤ أجريت مسابقة لتشكيل فريقين من الطلاب، حيث يتم سحب البطاقات عشوائيًّا من بين ٩ بطاقات مُرقَّمة من ١ إلى ٩ فإذا كان:

الفريق أ = تشكيل الطلاب الذين يسحبون الأعداد الفردية.

الفريق ب = تشكيل الطلاب الذين يسحبون الأعداد الزوجية.

أ إذا كان أحد الطلاب من الفريق أ فما احتمال سحب العدد ٧؟

ب إذا كان أحد الطلاب من الفريق ب فما احتمال سحب العدد ٤؟

١٥ الجدول الآتى يعرض توزيع ٥٠ شخصًا من حيث التدخين والاصابة بمرض ما:

أ / ب	مريض	غير مريض
يدخن	٣٠	١٠
لا يدخن	٢	٨

إذا اختير شخص عشوائيًّا من هذه المجموعة فأوجد كلًّا من:

أ احتمال ان يكون هذا الشخص مريضًا

ب احتمال أن يكون هذا الشخص مريضًا بشرط أن يكون من المدخنين.

جـ احتمال أن يكون هذا الشخص مريضًا بشرط أن يكون من غير المدخنين.

١٦ الجدول الآتى يبين توزيع مجموعة من ١٠ أشخاص:

	طالب	عامل
رياضى	٤	١
غير رياضى	٣	٢

إذا اختير شخصان عشوائيًّا فأوجد احتمال أن يكون أحدهما طالبًا رياضيًّا والآخر طالبًا غير رياضى .

أ إذا كان الاختيار مع الإحلال. ب إذا كان الاختيار من غير إحلال.



اسئلة ذات إجابات قصيرة

أولًا: أكمل ما يأتى:

(١) احتمال وقوع الحدث المستحيل = ...

(٢) عند القاء حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور العدد ٣ على الوجه العلوى = ...

(٣) إذا أختير عشوائيًا أحد أرقام العدد ٣٧٤٥٠ فإن احتمال أن يكون الرقم المختار زوجيًا = ...

(٤) أكبر قيمة لمعامل الإرتباط إذا كان الإرتباط طرديًا تاما = ...

ثانيا : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٥) عند القاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوى فإن احتمال ظهور عدد أكبر من أو يساوى ٦ يساوى:

(أ) صفر　　(ب) $\frac{١}{٦}$　　(جـ) $\frac{٥}{٦}$　　(د) ١

(٦) سلة بها ٤٨ كرة من نفس النوع بعضها أبيض وبعضها أحمر، والباقى أخضر، فإذا كان احتمال سحب كرة حمراء يساوى $\frac{٥}{٨}$ فإن عدد الكرات الحمراء فى السلة يساوى:

(أ) ٢٤　　(ب) ٣٠　　(جـ) ٣٢　　(د) ٣٦

(٧) أقل معامل أرتباط فيما يلى هو:

(أ) -٠,٩　　(ب) -٠,٥　　(جـ) ٠,١　　(د) ٠,٤

اسئلة ذات أجابات طويلة

(٨) احسب معامل ارتباط سبيرمان من بيانات الجدول التالى:

تقدير الرياضيات	ممتاز	جيد	جيد جدا	مقبول	جيد جدا	مقبول	جيد
تقدير الفيزياء	ضعيف	جيد جدا	مقبول	جيد جدا	مقبول	جيد جدا	جيد

(٩) فى مؤتمر عالمى ضم ١٥٠ عضوا وجد أن ١٠٠ عضو منهم يتكلمون الأنجليزية، ٦٠ عضوا يتكلمون الفرنسية، ٢٠ عضوا يتكلمون اللغتين معًا. أختير عضو عشوائيا أوجد أحتمال أن يكون الشخص المختار:

(أ) يتكلم أحد اللغتين على الأقل.

(ب) يتكلم اللغة الإنجليزية إذا كان يتكلم اللغة الفرنسية.

(جـ) يتكلم اللغة الفرنسية إذا كان يتكلم اللغة الأنجليزية.

(١٠) كيس يحتوى على ١٢ كرة صفراء و ٨ حمراء، إذا سحبت كرتان أحدهما وراء الأخرى دون إحلال (دون إرجاع)، ما احتمال أن تكون:

(أ) الكرتان صفراوين　　(ب) الكرة الأولى صفراء والثانية حمراء　　(جـ) الكرتان حمراوان





المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

Random Variables and Probability Distributions



مقدمة الوحدة

سبق أن درسنا التجربة العشوائية وبعض مفاهيم الاحتمالات، وفى كثير من الحالات نرغب فى التعامل مع قيم كمية (عددية) مرتبطة بنتائج للتجربة العشوائية والتى تكون فى بعض الحالات صفات أو مسميات يصعب التعامل معها رياضيًا، وفى هذه الحالة نقوم بتحويل هذه القيم الوصفية إلى قيم عددية حقيقية تُسمى بالمتغير العشوائى والتى تستخدم للتعبير عن نتائج التجربة العشوائية، وسوف ندرس فى هذه الوحدة نوعين من المتغيرات العشوائية وهما:

- المتغيرات العشوائية المتقطعة Discrete Random Variables
- المتغيرات العشوائية المتصلة Continuous Random Variables

كما سندرس كذلك دوال التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية والتى تنقسم إلى:

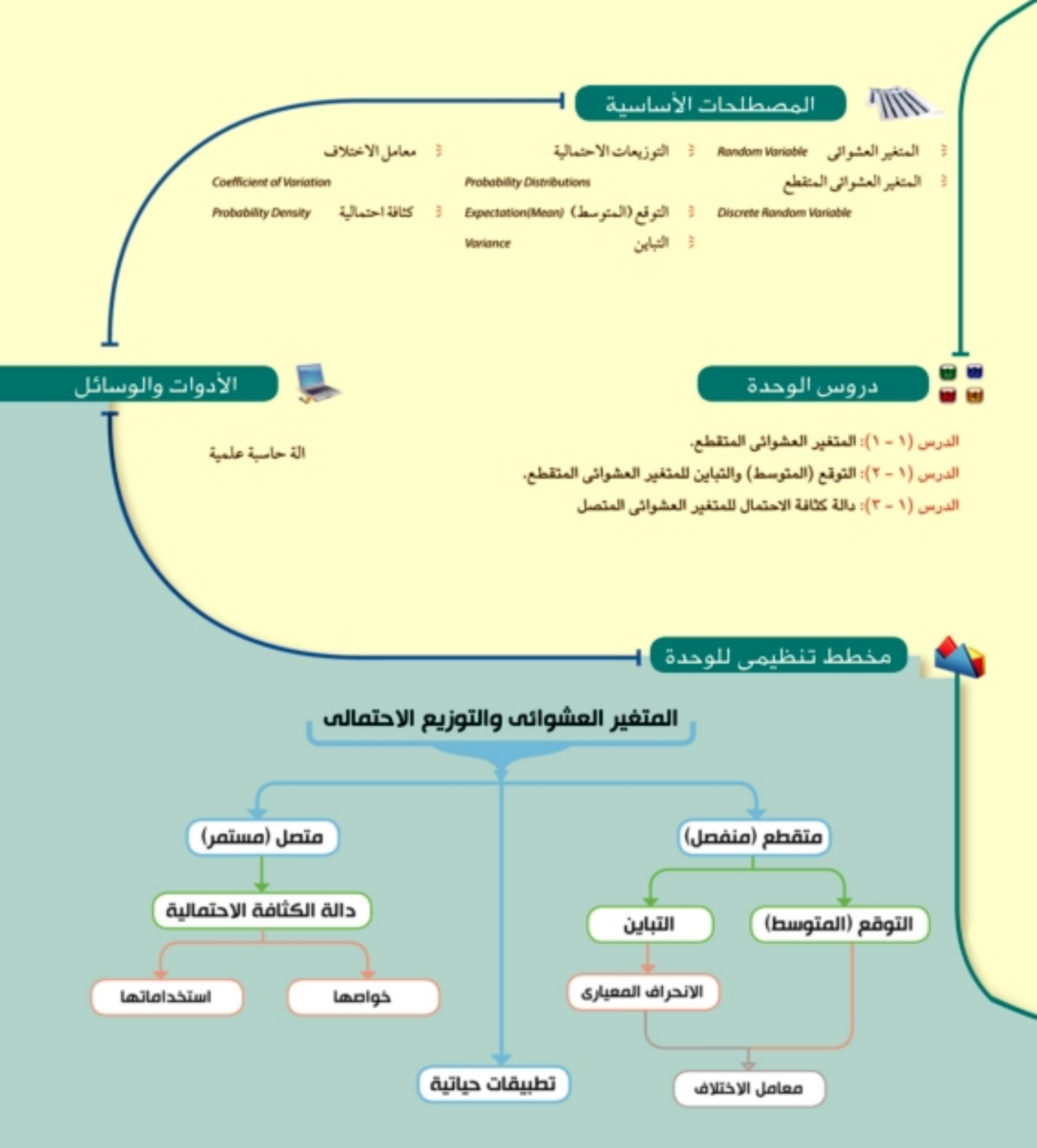
- دالة التوزيعات الاحتمالية المتقطعة Probability Distribution Function of Discrete Random Variable
- دالة التوزيعات الاحتمالية المتصلة (دوال الكثافة) Probability Density Function



أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم المتغير العشوائى، ويُميز بين المتغير العشوائى المتقطع (المنفصل) والمتصل .
- يتعرف مفهوم دالة الكثافة لمتغير عشوائى متصل ويعرف خواصها ويستخدمها فى حساب احتمال وقوع قيمة المتغير العشوائى داخل فترة معينة.
- يتعرف مفهوم المتوسط (التوقع) والتباين.
- يستنتج الانحراف المعيارى لمتغير عشوائى.
- يعين معامل الاختلاف.
- يتعرف التوزيعات المتصلة.


المصطلحات الأساسية
المتغير العشوائى Random Variable
المتغير العشوائى المتقطع Discrete Random Variable
التوزيعات الاحتمالية Probability Distributions
التوقع (المتوسط) Expectation(Mean)
التباين Variance
معامل الاختلاف Coefficient of Variation
كثافة احتمالية Probability Density
دروس الوحدة
الدرس (١ - ١): المتغير العشوائى المتقطع.
الدرس (١ - ٢): التوقع (المتوسط) والتباين للمتغير العشوائى المتقطع.
الدرس (١ - ٣): دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى المتصل
الأدوات والوسائل
الة حاسبة علمية
مخطط تنظيمى للوحدة
المتغير العشوائى والتوزيع الاحتمالى
متقطع (منفصل)
متصل (مستمر)
التوقع (المتوسط)
التباين
الانحراف المعيارى
معامل الاختلاف
دالة الكثافة الاحتمالية
خواصها
استخداماتها
تطبيقات حياتية

الوحدة الثالثة

٣ - ١ المتغير العشوائي المتقطع

Random Variable

سوف تتعلم

- المتغير العشوائى
- المتغير العشوائى المتقطع
- المتغير العشوائى المتصل
- التوزيعات الاحتمالية

المصطلحات الأساسية

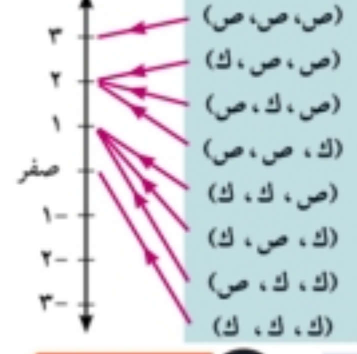
- المتغير العشوائى *Random Variable*
- المتغير العشوائى المستمر *Continuous Random Variable*
- المتغير العشوائى المتقطع *Discrete Random Variable*
- التوزيعات الاحتمالية *Probability Distributions*

مقدمة: سبق أن درست التجربة العشوائية، وأمكنك إيجاد فضاء العينة لها، وفى هذا الدرس سوف نتعرف متغيرًا جديدًا مرتبطًا بهذه التجربة العشوائية وهو المتغير العشوائى.

وسوف ندرس فى هذا الدرس كيفية وصف مفردات ظاهرتين مختلفتين من حيث العلاقة بينهما.

المتغير العشوائى:

فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية فإن فضاء العينة ف يتحدد كما فى الشكل المقابل. فإذا طُلب فى هذه التجربة إيجاد «عدد الصور» التى تظهر فى فضاء العينة ف فإننا نرسم مخططًا يظهر العلاقة بين ف (كمتغير مستقل)، وعدد الصور وهو عدد حقيقى ح « كمتغير تابع» وهذه العلاقة تعبر عن دالة، وتكتب رمزيًا كالآتى: سـ : ف ← ح حيث سـ يرمز إلى المتغير العشوائى.



تعريف: **المتغير العشوائى هو دالة مجالها مجموعة عناصر فضاء العينة ف ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ح.**

تذكر أن

تتحدد الدالة بالآتى:

- المجال
- المجال المقابل
- قاعدة الدالة

مدى الدالة هو مجموعة صور عناصر المجال فى المجال المقابل

ويكون مدى المتغير العشوائى سـ فى المثال السابق = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}

لاحظ أن: المتغير العشوائى يجزئ فضاء العينة ف إلى أحداث متنافية، كل حدث منها يرتبط بعدد حقيقى، وهذا الارتباط يُعبر عن دالة سـ من فضاء العينة ف إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

المتغير العشوائى المتقطع *Discrete Random Variable*

تعريف: **المتغير العشوائى المتقطع (المنفصل أو الوثاب): مداه مجموعة محدودة (منتهية) أى قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية.**

ومن أمثلة ذلك:

- عدد الأسهم المخصصة لأحد الأفراد فى اكتتاب شركة مساهمة.

الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب.

- عدد الحوادث على إحدى الطرق السريعة خلال أسبوع.
- عدد المكالمات التليفونية الصادرة لأسرة خلال شهر.



المتغير العشوائى المتقطع

(١) فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائى س يعبر عن « عدد الصور - عدد الكتابات » اكتب مدى المتغير العشوائى.

الحل

ف = { (ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك) }

فضاء العينة ف	س: عدد الصور - عدد الكتابات
(ص ، ص ، ص)	٣ - ٠ = ٣
(ص ، ص ، ك)	٢ - ١ = ١
(ص ، ك ، ص)	٢ - ١ = ١
(ص ، ك ، ك)	١ - ٢ = -١
(ك ، ص ، ص)	٢ - ١ = ١
(ك ، ص ، ك)	١ - ٢ = -١
(ك ، ك ، ص)	١ - ٢ = -١
(ك ، ك ، ك)	٠ - ٣ = -٣

مدى المتغير العشوائى = {-٣ ، -١ ، ١ ، ٣}

حاول أن تحل

(١) فى المثال السابق أوجد مدى المتغير العشوائى الذى يعبر عن: عدد الصور × عدد الكتابات.



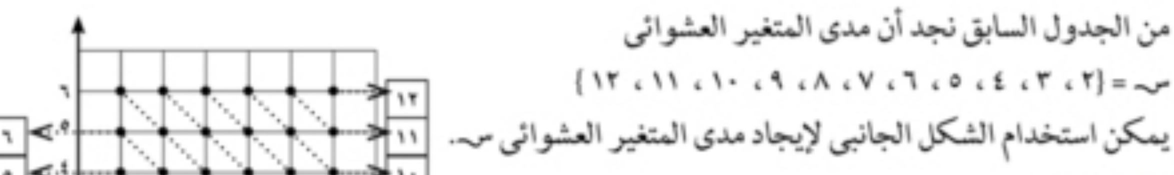
المتغير العشوائى المتقطع

(٢) ألقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ، أوجد المتغير العشوائى الذى يعبر عن مجموع العددين الظاهرين.

الحل

فضاء العينة ف	س : مجموع العددين
(١ ، ١)	٢
(١ ، ٢) ، (٢ ، ١)	٣
(٣ ، ١)، (٢ ، ٢)، (١ ، ٣)	٤
(٤ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (١ ، ٤)	٥
(٥ ، ١)، (٤ ، ٢)، (٣ ، ٣)، (٢ ، ٤)، (١ ، ٥)	٦

فضاء العينة ف	س : مجموع العددين
(٦ ، ١)، (٥ ، ٢)، (٤ ، ٣)، (٣ ، ٤)، (٢ ، ٥)، (١ ، ٦)	٧
(٦ ، ٢)، (٥ ، ٣)، (٤ ، ٤)، (٣ ، ٥)، (٢ ، ٦)	٨
(٦ ، ٣)، (٥ ، ٤)، (٤ ، ٥)، (٣ ، ٦)	٩
(٦ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٤ ، ٦)	١٠
(٦ ، ٥) ، (٥ ، ٦)	١١
(٦ ، ٦)	١٢



من الجدول السابق نجد أن مدى المتغير العشوائى

س = {٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢}

يمكن استخدام الشكل الجانبى لإيجاد مدى المتغير العشوائى س.

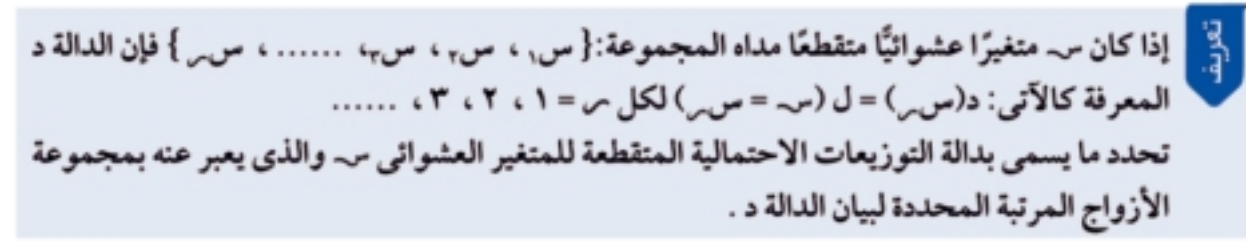
حاول أن تحل

(٢) فى المثال السابق أوجد مدى المتغير العشوائى الذى يعبر عن: «أكبر العددين الظاهرين».



التوزيعات الاحتمالية

دالة التوزيعات الاحتمالية المتقطعة *Probability Distribution Function of Discrete Random Variable*



تعريف

إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه المجموعة: { $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ...... ، $س_ر$ } فإن الدالة د المعرفة كالآتى: د($س_ر$) = ل (س = $س_ر$) لكل ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ......

تحدد ما يسمى بدالة التوزيعات الاحتمالية المتقطعة للمتغير العشوائى س والذى يعبر عنه بمجموعة الأزواج المرتبة المحددة لبيان الدالة د .

أى أن التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س = { ($س_1$ ، د($س_1$)) ، ($س_2$ ، د($س_2$)) ، ($س_3$ ، د($س_3$)) ، .... ، ($س_ن$ ، د($س_ن$)) }

ملاحظة: يمكن كتابة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س فى صورة جدول كالآتى:

$س_ر$	$س_1$	$س_2$	$س_3$	......	$س_ن$
د($س_ر$)	د($س_1$)	د($س_2$)	د($س_3$)	......	د($س_ن$)

ويلاحظ أن الدالة د فى التعريف السابق تحقق الشرطين الآتيين.

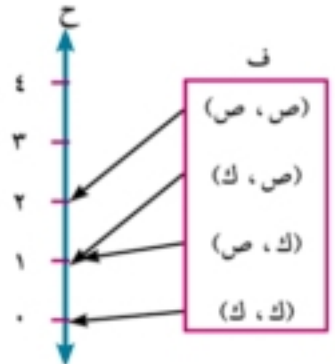
١- د($س_ر$) ⩾ ٠ لكل ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ...... ، ن

٢- د($س_1$) + د($س_2$) + د($س_3$) + ... + د($س_ر$) = ١

مثال

دالة التوزيع الاحتمالى

(٣) أُلقيت قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة الوجه الظاهر ، اكتب دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س الذى يعبر عن عدد مرات ظهور الصورة.



الحل

ف = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) }

نجد من الشكل الجانبى أن مدى المتغير العشوائى الذى يعبر عن عدد ظهور صورة = { ٠ ، ١ ، ٢ }

د(٠) = ل(س = ٠) = $\frac{ن(س_1)}{ن(ف)}$ = $\frac{١}{٤}$

د(١) = ل(سـ = ١) = $\frac{\text{ن(سـ}_٢)}{\text{ن(ف)}}$ = $\frac{٢}{٤}$ ، د(٢) = ل(سـ = ٢) = $\frac{\text{ن(سـ}_٣)}{\text{ن(ف)}}$ = $\frac{١}{٤}$

وتكون دالة التوزيع الاحتمالى هى:

سر	٠	١	٢
د(سر)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$

حاول أن تحل

(٣) فى المثال السابق اكتب دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ الذى يعبر عن:(عدد مرات ظهور الصورة - عدد مرات ظهور الكتابة).

مثال

السحب دون إحلال

(٤) صندوق به ٥ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٥ ، سُحبت منه بطاقتان واحدة بعد الأخرى بدون إحلال (دون إرجاع) ، أوجد دالة التوزيع الاحتمالى لكل من المتغير العشوائي الذى يعبر عن أصغر العددين على البطاقتين المسحوبتين.

الحل

طالما أن سحب البطاقات يتم بدون إرجاعها إلى الصندوق ، فإن البطاقة التى تسحب لا تتكرر ثانية، بمعنى أن أزواج البطاقات التى تحمل الأرقام (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) لا تكون ضمن فضاء العينة كما هو موضح بالشكل المقابل.

ن(ف) = ٢٠

من الشكل المقابل نجد أن مدى المتغير العشوائى سـ هو:

سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } وأن:

د(١) = ل (سـ = ١) = $\frac{٨}{٢٠}$

د(٢) = ل (سـ = ٢) = $\frac{٦}{٢٠}$

د(٣) = ل (سـ = ٣) = $\frac{٤}{٢٠}$

د(٤) = ل (سـ = ٤) = $\frac{٢}{٢٠}$

دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ يعطى كما بالجدول الآتى:

سر	١	٢	٣	٤
د(سر)	$\frac{٨}{٢٠}$	$\frac{٦}{٢٠}$	$\frac{٤}{٢٠}$	$\frac{٢}{٢٠}$

حاول أن تحل

(٤) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فى كل مرة ، أوجد دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى الذى يعبر عن أكبر العددين الظاهرين على الوجهين العلويين.

مثال

استخدام قاعدة الدالة

٥ إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا ودالة توزيعه الاحتمالى تتحدد بالعلاقة:

د(س) = $\frac{ك + ٢س}{٢٤}$ حيث س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ فأوجد قيمة ك ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالى.

الحل

$\because$ د(٠) = ل(س = ٠) = $\frac{ك}{٢٤}$ ، د(١) = ل(س = ١) = $\frac{ك + ٢}{٢٤}$ ،

د(٢) = ل(س = ٢) = $\frac{ك + ٤}{٢٤}$ ، د(٣) = ل(س = ٣) = $\frac{ك + ٦}{٢٤}$

$\because$ ل(س = ٠) + ل(س = ١) + ل(س = ٢) + ل(س = ٣) = ١

$\therefore$ $\frac{ك}{٢٤} + \frac{ك + ٢}{٢٤} + \frac{ك + ٤}{٢٤} + \frac{ك + ٦}{٢٤} = ١$

$\therefore$ $\frac{ك + ك + ٢ + ك + ٤ + ك + ٦}{٢٤} = ١$ $\therefore$ ٤ ك + ١٢ = ٢٤

$\therefore$ ٤ ك = ٢٤ − ١٢ $\therefore$ ٤ ك = ١٢ $\therefore$ ك = ٣

لإيجاد دالة التوزيع الاحتمالى نوجد:

ل(س = ٠) = $\frac{ك}{٢٤} = \frac{٣}{٢٤}$ ، ل(س = ١) = $\frac{ك + ٢}{٢٤} = \frac{٥}{٢٤}$

ل(س = ٢) = $\frac{ك + ٤}{٢٤} = \frac{٧}{٢٤}$ ، ل(س = ٣) = $\frac{ك + ٦}{٢٤} = \frac{٩}{٢٤}$

$\therefore$ دالة التوزيع الاحتمالى هى:

سر	٠	١	٢	٣
د(سر)	$\frac{٣}{٢٤}$	$\frac{٥}{٢٤}$	$\frac{٧}{٢٤}$	$\frac{٩}{٢٤}$

حاول أن تحل

٥ إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا مداه = {١ ، ٢ ، ٣} ودالة توزيعه الاحتمالى تتحدد بالعلاقة د(س) = $\frac{أ س}{٩}$
أوجد قيمة أ ، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالى.



تمارين ٣ - ١

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

① أيٌّ من الدوال الآتية تمثل دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س:

أ

س	١	٢	٣	٤
د(س)	٠,٠٦	٠,١٥	٠,٤٢	٠,٢٦

ب

س	٠	١	٣	٥
د(س)	٠,٥	٠,٣	٠,٤	٠,٢-

جـ

س	٢-	١-	١	٢
د(س)	٠,٣٢	٠,١٤	٠,٢٣	٠,٣١

د

س	٣	٤	٥	٦
د(س)	٠,٢٣	٠,٣٢	٠,١٧	٠,١٨

② إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا مداه { ٠ ، ١ ، ٢ } ، فإن جميع الدوال الآتية لا تمثل دالة التوزيع الاحتمالى له ماعدا الدالة:

أ د(س) = $\frac{س^{٢} + ١}{٨}$ ب د(س) = $\frac{٢س + ١}{٣}$ جـ د(س) = $\frac{١}{س + ٢}$ د د(س) = $\frac{٣س - ١}{٦}$

③ إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا مداه {١ ، ٢ ، ٣} وكان ل(س = ١) = ٠,٣ ، ل(س = ٢) = ٠,٥ فإن ل(س = ٣) تساوى:

أ ٠,١   ب ٠,٢   جـ ٠,٧   د ٠,٨

④ إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا مداه {١ ، ٢ ، - ١ ، ٠ } وكان ل(س = - ١) = ٠,٢ ، ل(س = ٠) = ٠,٤ ، ل(س = ١) = ٠,١ فإن ل(س > ١) تساوى::

أ ٠,٣   ب ٠,٤   جـ ٠,٥   د ٠,٦

⑤ فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية وكان س هو المتغير العشوائى الذى يعبر عن:
«عدد الصور - عدد الكتابات» فإن مدى س هو:

أ {١ ، ٣}   ب {٠ ، ١ ، ٣}   جـ { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}   د {-٣ ، -١ ، ١ ، ٣}

⑥ إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه = {٠ ، ١ ، ٢ } ودالة توزيعه الاحتمالى تتحدد بالعلاقة:
د(س) = $\frac{أس}{٦}$ فإن قيمة أ تساوى:

أ $\frac{١}{٢}$ ب ١   جـ $\frac{٣}{٢}$ د ٢

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

⑦ الجدولان الأتيان يبينان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س ، أوجد قيمة أ فى كل جدول:

أ

س	١	٢	٢	٣
د(س)	أ	٢أ	٢أ	٣أ

ب

س	٢-	١-	٠	١	٢
د(س)	أ	٠,٢	٠,٣	٣أ	أ

جـ

س	٠	١	٣	٤
د(س)	أ	$٢أ^{٢}$	$٣أ^{٢}$	٣أ

(٨) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } وكانت قيم ل (سـ = ٠) = ٠,٢ ، ل (سـ = ١) = ٠,٣٣، ل (سـ = ٢) = ٠,٣٧ فأوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ.

(٩) إذا كانت قيم المتغير العشوائى سـ فى تجربة عشوائية هى: -٢ ، ٠ ، ٢ ، ٤ باحتمالات قدرها $\frac{م}{٥}$ ، $\frac{م + ١}{٥}$ ، $\frac{٢م - ١}{٥}$ ، $\frac{٣م - ٢}{٥}$ على الترتيب فأوجد قيمة م ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير سـ .

(١٠) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا ودالة توزيعه الاحتمالى يتحدد بالعلاقة:

د(س) = $\frac{أ^{٢} + ٣سـ}{٥٤}$ ومدى سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } أوجد قيمة أ واكتب دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير سـ.

(١١) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا وتوزيعه الاحتمالى يتحدد بالدالة د(س) = $\frac{ك + ٣س}{٥٠}$:
حيث س = ١ ، ٢ ، ٣، ٤ فأوجد قيمة ك، ثم اكتب التوزيع الاحتمالى للمتغير سـ

(١٢) فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية ، إذا كان المتغير العشوائى سـ يعبر عن « عدد الصور – عدد الكتابات » فاكتب التوزيع الاحتمالى للمتغير سـ

(١٣) صندوقان بكل منهما ثلاث كرات مرقمة من ٣ إلى ٥ سحبت كرة عشوائيًّا من كل صندوق وعرف المتغير العشوائى سـ بأنه « مجموع العددين » الموجودين على الكرتين المسحوبتين. أوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ.

(١٤) فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى فى كل مرة ، اكتب التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ الذى يعبر عن « أصغر العددين الظاهرين ».

(١٥) صندوق به ٤ كرات مرقمة من ١ الى ٤ ، سحبت منه كرتان واحدة بعد الأخرى (مع الإحلال) ، اكتب التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ الذى يعبر عن « المتوسط للرقمين على الكرتين المسحوبتين ».

(١٦) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا يعبر عن عدد البنات فى أسرة لديها ثلاثة أطفال ، اكتب مدى المتغير العشوائى سـ ، و إذا فرضنا أن احتمال إنجاب ولد يساوى احتمال إنجاب بنت بفرض عدم وجود توأم. أوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ « يراعى ترتيب الأولاد والبنات ».



الوحدة الثالثة

٣ - ٢ التوقع(الوسط) والتباين للمتغير العشوائى المتقطع

Expectation and Variance of a Discrete Random Variable

سوف تتعلم

- التوقع (المتوسط)
- التباين
- الانحراف المعيارى
- معامل الاختلاف

المصطلحات الأساسية

- التوقع (المتوسط) *Expectation(Mean)*
- التباين *Variance*
- معامل الاختلاف: *Coefficient of Variation*

مقدمة: لتحديد صفات التوزيع الاحتمالى (أى تحديد صفات المجتمع الأصلى أو للمقارنة بين المجتمعات المختلفة) فإنه يلزمنا بعض المعالم الأساسية لقياس القيمة المتوسطة لها وهى القيمة التى تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائى وتعرف بالتوقع (المتوسط) ، وهناك أيضًا قيم أخرى تقيس تشتت قيم المتغير العشوائى عن قيمة المتوسط تعرف بالتباين ، لذلك فإن التوقع والتباين يلخصان أهم صفات المتغيرات العشوائية.

التوقع (المتوسط): *Expectation (Mean)*

التوقع هو القيمة التى تتمركز عندها معظم قيم المتغير العشوائى ويسمى أحيانًا « المتوسط» ويرمز له بالرمز (μ) ويقرأ (ميو).

فإذا كان س متغير عشوائيًا متقطعًا دالة التوزيع الاحتمالى له هى د ومداه هو:{ س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$ ، .... ، س$_ن$} باحتمالات د(س$_1$) ، د(س$_2$) ، د(س$_3$) ، .... ، د(س$_ن$) على الترتيب فإن التوقع يعطى بالعلاقة:

$$\text{التوقع } (\mu) = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر \times د(س_ر)$$

أى أن: التوقع (μ) = س$_1$ × د(س$_1$) + س$_2$ × د(س$_2$) + س$_3$ × د(س$_3$) + ... + س$_ن$ × د(س$_ن$)

مثال

(١) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا توزيعه الاحتمالى مبينًا بالجدول الآتى:

س$_ر$	١-	٠	١	٢	٣
د(س$_ر$)	٠,٣	٠,١	٠,١	أ	٠,٢

أولًا: أوجد قيمة أ **ثانيًا:** أوجد التوقع (المتوسط)

الحل

أولًا: نعلم أن مجموع الاحتمالات يساوى الواحد الصحيح

∵ ل(س = - ١) + ل(س = ٠) + ل(س = ١) + ل(س = ٢) + ل(س = ٣) = ١

∴ ٠,٣ + ٠,١ + ٠,١ + أ + ٠,٢ = ١

∴ أ + ٠,٧ = ١ ∴ أ = ١ - ٠,٧ = ٠,٣

الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب.

ثانيًا:

∵ التوقع (μ) = $\sum_{ر=1}^{ن}$ س$_ر$ × د(س$_ر$) = -١ × ٠,٣ + ٠ × ٠,١ + ١ × ٠,١ + ٢ × ٠,٣ + ٣ × ٠,٢

= -٠,٣ + ٠ + ٠,١ + ٠,٦ + ٠,٦ = ١

حاول أن تحل

(١) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا مداه = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} وكان:

ل(س = ٠) = ل (س = ٤) = $\frac{١}{١٦}$ ، ل (س = ١) = ل (س = ٣) = $\frac{١}{٤}$

أوجد: **أولًا**: ل (س = ٢) **ثانيًا**: التوقع

مثال

(٢) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا توزيعه الاحتمالى كالآتى:

س$_ر$	٠	١	٢	ب	٦
د(س$_ر$)	٠,١	٠,١	٠,٣	أ	٠,٣

احسب قيمة أ ، ب إذا كان التوقع μ = ٣,٥

الحل

من خواص التوزيع الاحتمالى: د(٠) + د(١) + د(٢) + د(ب) + د(٦) = ١

∴ ٠,١ + ٠,١ + ٠,٣ + أ + ٠,٣ = ١ ∴ أ = ١ - ٠,٨ **أ = ٠,٢**

∵ التوقع (μ) = $\sum_{ر=1}^{ن}$ س$_ر$ × د(س$_ر$) = ٣,٥

∴ ٠ × ٠,١ + ١ × ٠,١ + ٢ × ٠,٣ + ب × ٠,٢ + ٦ × ٠,٣ = ٣,٥

∴ ٠ + ٠,١ + ٠,٦ + ٠,٢ ب + ١,٨ = ٣,٥ ∴ ٠,٢ ب = ٣,٥ - ٢,٥

∴ ب = ١ ÷ ٠,٢ = ٥ **ب = ٥**

حاول أن تحل

(٢) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا توزيعه الاحتمالى مبينًا بالجدول الآتى:

س$_ر$	٠	٢	٣	٤
د(س$_ر$)	$\frac{٣}{١٦}$	٢ ل	$\frac{١}{١٦}$	ل

أولًا: أوجد قيمة ل **ثانيًا**: أوجد التوقع

التباين: *Variance*

التباين لمتغير عشوائى متقطع س يقيس مقدار التشتت للمتغير العشوائى عن قيمته المتوقعة، ويرمز له بالرمز (σ^2) ويقرأ (سيجما تربيع) ويعطى بالعلاقة:

$$\sigma^2 = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 \times د(س_ر) - \mu^2$$

ملاحظة: الانحراف المعيارى للمتغير العشوائى سـ هو الجذر التربيعى للتباين و يرمز له بالرمز σ ، ويلاحظ أن التباين والانحراف المعيارى كميات موجبة دائمًا.

مثال

(٣) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متقطعًا ودالة توزيعه الاحتمالى هى د(س) = $\frac{\text{س} + ٤}{١٦}$ حيث س = -٢ ، م ، ١ ، ٢ فأوجد قيمة م ثم أوجد المتوسط والتباين للمتغير العشوائى سـ .

الحل

من خواص دالة التوزيع الاحتمالى:

∵ ل(س = - ٢) + ل(س = م) + ل(س = ١) + ل(س = ٢) = ١

∴ $\frac{٢}{١٦} + \frac{\text{م} + ٤}{١٦} + \frac{٥}{١٦} + \frac{٦}{١٦} = ١$

∴ $\frac{١٧ + \text{م}}{١٦} = ١$ ∴ ١٧ + م = ١٦ ∴ م = -١

$\text{س}_{\text{ر}}$	$\text{د}(\text{س}_{\text{ر}})$	$\text{س}_{\text{ر}} \bullet \text{د}(\text{س}_{\text{ر}})$	$\text{س}^٢_{\text{ر}} \bullet \text{د}(\text{س}_{\text{ر}})$
٢-	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{-٤}{١٦}$	$\frac{٨}{١٦}$
١-	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{-٣}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$
١	$\frac{٥}{١٦}$	$\frac{٥}{١٦}$	$\frac{٥}{١٦}$
٢	$\frac{٦}{١٦}$	$\frac{١٢}{١٦}$	$\frac{٢٤}{١٦}$
		$\frac{٥}{٨}$	$\frac{٥}{٢}$

التوقع (μ) = $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} \times \text{د}(\text{س}_{\text{ر}}) = \frac{٥}{٨}$

التباين ($\sigma^٢$) = $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}^٢_{\text{ر}} \times \text{د}(\text{س}_{\text{ر}}) - \mu^٢ = \frac{٥}{٢} - (\frac{٥}{٨})^٢ = \frac{١٣٥}{٦٤}$

حاول أن تحل

(٣) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متقطعًا توزيعه الاحتمالى يتحدد بالدالة د(س) = $\frac{أ}{\text{س} + ١}$

حيث سـ = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ أوجد: **أولًا**: قيمة أ **ثانيًا**: التوقع والانحراف المعيارى للمتغير العشوائي سـ.

معامل الاختلاف: *Coefficient of Variation*

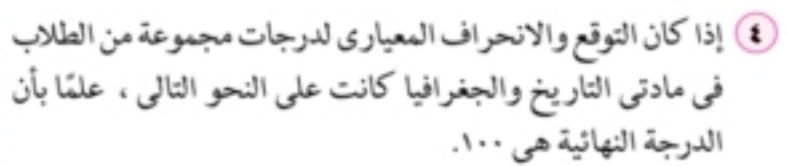
عند دراستنا للانحرف المعيارى كمقياس لتشتت قيم المتغير العشوائى عن توقعه علمنا بأنه يقاس بنفس وحدات المتغير موضوع البحث سواء كانت هذه الوحدات درجات أو أمتار أو كجم .. إلخ أى أنه يصلح أيضًا فى مقارنة مجموعتين لهما نفس الوحدات ونفس المتوسطات. أما إذا اختلفت الوحدات أو المتوسطات بين المجموعتين فإنه يتعذر استخدام الانحراف المعيارى كمقياس للمقارنة ومن هنا نشأت الحاجة إلى مقياس نسبى للتشتت يخلصنا من هذه الوحدات المختلفة و يمثل معامل الاختلاف حلًا مناسبًا لهذه المشكلة .

يعرف معامل الاختلاف لأى مجموعة من المفردات بأنه النسبة المئوية بين الانحراف المعيارى للمجموعة والتوقع (المتوسط) لها و يتحدد كما فى العلاقة الآتية:

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{المتوسط}} \times ١٠٠\% = \frac{\sigma}{\mu} \times ١٠٠\%$$

وهذا المعامل يصور تشتت المجموعة فى صورة نسبة مئوية مجردة من التمييز بحيث لا تتأثر بالوحدات المقيسة بها الظاهرة.

مثال



٤ إذا كان التوقع والانحراف المعيارى لدرجات مجموعة من الطلاب فى مادتى التاريخ والجغرافيا كانت على النحو التالى ، علمًا بأن الدرجة النهائية هى ١٠٠.



المقاييس	امتحان التاريخ	امتحان الجغرافيا
التوقع	٧٠	٩٦
الانحراف المعيارى	٧	٨

أوجد معامل الاختلاف لكل مادة - ماذا تلاحظ ؟

الحل

$\because$ معامل الاختلاف = $\frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{المتوسط}} \times ١٠٠\%$

$\therefore$ معامل الاختلاف لمادة التاريخ = $\frac{٧}{٧٠} \times ١٠٠\% = ١٠\%$ ،

معامل الاختلاف لمادة الجغرافيا = $\frac{٨}{٩٦} \times ١٠٠\% \simeq ٨,٣\%$

نلاحظ من الحل: أن التشتت النسبى لامتحان مادة التاريخ أكبر من التشتت النسبى لامتحان مادة الجغرافيا، وهذا معناه أن امتحان مادة الجغرافيا أكثر تجانسًا من امتحان مادة التاريخ.

حاول أن تحل

٤ إذا كان أحد المصانع ينتج نوعين من المصابيح أ ، ب وكان متوسط العمر لهما بالساعة ١٨٥٠، ١٥٨٠ وانحرافهما المعيارى بالساعة ٢٥٠ ، ٢٣٠ على الترتيب اوجد معامل الاختلاف لكل نوع - ماذا تلاحظ؟.

مثال

٥ كيس به ٦ بطاقات، منها بطاقتان تحملان العدد ٢ وثلاث بطاقات تحملان العدد٣ وبطاقة تحمل العدد ١١ ، فإذا سحبت بطاقة واحدة عشوائية وعرف المتغير العشوائى س بأنه «العدد الظاهر على البطاقة المسحوبة».
أوجد:

أ) دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير س.

ب) التوقع والانحراف المعيارى للمتغير س. ج) معامل الاختلاف.

الحل

أ) س تأخذ القيم ٢ ، ٣ ، ١١ حيث: د(٢) = ل (س = ٢) = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

د(٣) = ل (س = ٣) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$ ، د (١١) = ل(س = ١١) = $\frac{١}{٦}$

والجدول التالى يبين دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائي س.

سر	٢	٣	١١
د(سر)	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٦}$

ولحساب التوقع والانحراف المعيارى نكون الجدول التالى:

سر	د(سر)	سر • د(سر)	$س^٢_ر$ • د(سر)
٢	$\frac{٢}{٦}$	$\frac{٤}{٦}$	$\frac{٨}{٦}$
٣	$\frac{٣}{٦}$	$\frac{٩}{٦}$	$\frac{٢٧}{٦}$
١١	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١١}{٦}$	$\frac{١٢١}{٦}$
المجموع		٤	٣٦

ب) التوقع (μ) = $\sum_{ر=١}^{ن}$ سر × د(سر) = ٤

التباين ($\sigma^٢$) = $\sum_{ر=١}^{ن}$ $س^٢_ر$ × د(سر) − $\mu^٢$ = ٣٦ − $(٤)^٢$ = ١٠

الانحراف المعيارى σ = $\sqrt{١٠}$ = ٣,١٦

ج) ∵ معامل الاختلاف = $\frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{المتوسط}}$ × ١٠٠ ٪

∴ معامل الاختلاف = $\frac{٣,١٦}{٤}$ × ١٠٠ ٪ = ٧٩ ٪

حاول أن تحل

٥) كيس يحتوى على ١٠ بطاقات واحدة تحمل الرقم ١ ، بطاقتان تحمل كل منهما الرقم ٢ ، ثلاث بطاقات تحمل كل منهما الرقم ٣ ،ر أربع بطاقات تحمل كل منهما الرقم ٤ ، فإذا سحب من الكيس عشوائيًا إحدى هذه البطاقات وكان المتغير العشوائى س يعبر عن العدد على البطاقة المسحوبة فأوجد دالة التوزيع الاحتمالى لهذا المتغير واحسب كلًا من التوقع وانحرافه المعيارى ومعامل الاختلاف.



أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س هو {(٠ ، ٠,٢٥) ، (١ ، ٠,٥) ، (٢ ، ٠,٢٥)} فإن التوقع يساوي:

أ) ٠,٥ ب) ١ جـ) ١,٢٥ د) ١,٥

٢) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا وكان التوقع يساوي ٠,٦ ، $\sum_{ر=١}^{ن}$ س$_ر^٢$ × د(س$_ر$) = ٤,٣٦ فإن الانحراف المعياري له يساوي:

أ) ١,٩٤ ب) ٢ جـ) ٣,٧٦ د) ٤

٣) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا وكان التوقع يساوي ٠,٤ ، $\sum$ س$_ر^٢$ × د(س$_ر$) = ٦,١٦ فإن التباين له يساوي:

أ) ٢,٤ ب) ٥,٧٦ جـ) ٦ د) ٦,٥٦

ثانيًا: أوجد التوقع والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي لكل مما يأتي:

٤)

س$_ر$	٢	٣	٩
د(س$_ر$)	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٦}$

٥)

س$_ر$	-٥	-٤	١	٢
د(س$_ر$)	$\frac{١}{٢٤}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٥}{١٢}$	$\frac{١}{٦}$

٦)

س$_ر$	-٣	-١	٠	١	٢	٣
د(س$_ر$)	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{١٢}$

ثالثًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

٧) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا توزيعه الاحتمالي مبينًا بالجدول الآتي:

س$_ر$	١	٢	٤	٦
د(س$_ر$)	٠,٢	٠,٣	أ	٠,١

أولًا: أوجد قيمة أ ثانيًا: أوجد المتوسط والانحراف المعياري

٨) إذا كان مدى المتغير العشوائي س هو {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}،
ل(س = ١) = $\frac{٤}{٢٥}$ ، ل(س = ٢) = $\frac{٧}{٢٥}$ ، ل(س = ٤) = $\frac{١}{٥}$ فاحسب توقع وتباين س.

٩) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا مداه {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ل(س = ٠) = ل(س = ٤) = $\frac{١}{١٦}$ ،
ل(س = ١) = ل(س = ٣) = $\frac{١}{٤}$ أوجد: أولًا: ل (س: ٢) ثانيًا: المتوسط والتباين للمتغير س.

١٠) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا دالة توزيعه الاحتمالي مبينًا بالجدول الآتي ، حيث ٠ < ح < ١

س$_ر$	-٣	صفر	٣	٦
د(س$_ر$)	ح	ح^٢	٢ح^٢	ح

فأوجد: أ قيمة ح

ب التوزيع الاحتمالي للمتغير س. ج المتوسط والتباين للمتغير س.

١١ إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا توزيعه الاحتمالي مبينًا بالجدول الآتي:

$س_ر$	١	٢	٤	أ
$د(س_ر)$	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,١

احسب قيمة أ إذا كان التوقع μ = ٣ ثم أوجد الانحراف المعياري للمتغير العشوائي س.

١٢ إذا كان التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع س يحدد بالدالة د حيث: د(س) = $\frac{أس}{٩}$ ، حيث س = ١، ٢، ٣

أوجد: أ قيمة أ ب احسب التوقع والتباين للمتغير س.

١٣ إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا وتوزيعه الاحتمالي يحدد بالدالة: د(س) = $\frac{س^٢ + ١}{أ}$ حيث س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

أوجد: أ قيمة أ ب احسب معامل الاختلاف للمتغير س.

١٤ إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا توزيعه الاحتمالي يحدد بالدالة: د(س) = $\frac{س + ٤}{١٦}$ حيث س = - ٢، م، ١، ٢

فأوجد: أ قيمة م ب المتوسط والتباين للمتغير س.

١٥ إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا توزيعه الاحتمالي يحدد بالدالة د حيث:

د(س) = $\frac{أ}{س + ٣}$ ، س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

أ أوجد قيمة أ ب أوجد التوقع والتباين.

١٦ إذا كان مدى المتغير العشوائي س هو {-١ ، ٠ ، ٢} وكان ل(س = -١) = $\frac{١}{٤}$ وكان التوقع يساوي ١ فأوجد:

أ ل(س = ٠) ، ل (س = ٢) ب أوجد معامل الاختلاف.

١٧ إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متوسطه μ = ٣ وتوزيعه الاحتمالي كالآتي:

$س_ر$	٠	٢	ك	٤
$د(س_ر)$	١	٢أ	$\frac{١}{٤}$	٥أ

أ احسب قيمة أ ، ك

ب أوجد الانحراف المعياري للمتغير س.

دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى المتصل

Probability Density Function Of Random Variable

سوف تتعلم
- دالة الكثافة الاحتمالية

المصطلحات الأساسية
- كثافة احتمالية *Probability Density*

المتغير العشوائى المستمر أو المتصل *Continuous Random Variable*

تعريف

المتغير العشوائى المستمر (المتصل): مداه فترة من الأعداد الحقيقية (مغلقة أو مفتوحة)، أى إنها مجموعة غير قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية.

ومن أمثلة ذلك:
- أجر عامل بالدولة تم اختياره عشوائيًّا.
- درجة الحرارة المتوقعة خلال أحد الأيام.
- طول احد المرشحين لفريق كرة السلة.

مثال

المتغير العشوائى المستمر

٦ النقطة (س ، ص) تقع داخل أو على الدائرة س^٢ + ص^٢ = ٤ التى مركزها نقطة الأصل (و) ونصف قطرها ٢ وحدة طول والمطلوب إيجاد مدى المتغير العشوائى سـ الذى يعبر عن بعد النقطة عن مركز الدائرة .

الحل

∵ ف = { (س ، ص): س^٢ + ص^٢ ⩽ ٤ }

∴ ٠ ⩽ أ ⩽ ٢ حيث أ بعد النقطة (س ، ص) عن مركز الدائرة.

∴ مدى المتغير العشوائى سـ = [٠ ، ٢]

٢ ـــــ أ ـــــ ٠

نلاحظ أن كل نقطة فى هذه الفترة هى قيمة ممكنة للمتغير العشوائى سـ كما هو موضح بالشكل



حاول أن تحل

١ إذا كان أقصى عُمر افتراضى لأحد أنواع الهواتف المحمولة «سـ» يقدر بـ ١٨ ساعة تشغيل. فاكتب مدى سـ.

حاول أن تحل

٢ بين أيًا مما يأتى يدل على متغير عشوائي متقطع وأيها يدل على متغير عشوائى متصل.

أ عدد أرغفة الخبز التى أنتجها مخبز خلال ساعة.

ب الوقت الذى يستغرقه كريم فى انتظار صديقه زياد.

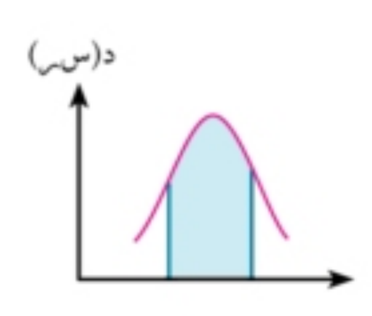
جـ عدد الأهداف التى سجلها الفريق الفائز فى مباريات كرة اليد.

د عدد المخالفات المرورية المسجلة على طريق مصر - إسكندرية الصحراوى خلال يوم.

هـ الوقت الذى يستغرقه المعلم فى شرح درس المتغير العشوائى.

الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب.

دالة الكثافة الاحتمالية : *Probability Density Function*



لأي متغير عشوائي متصل (مستمر) س توجد دالة حقيقيةمداها غير سالب يرمز لها بالرمز د(س) تسمى دالة الكثافة الاحتمالية يمكن من خلالها إيجاد احتمالات الأحداث المعبرة عنها بواسطة المتغير العشوائي من خلال المساحة المحصورة أسفل منحنى الدالة وأعلى محور السينات ويتم حساب ل(أ < س < ب) بحساب مساحة الجزء المظلل من منحنى الدالة د بين القيمتين أ ، ب كما في الشكل المقابل.

وتحقق هذه الدالة الشروط الآتية :

- د(س) ⩾ ٠ لجميع قيم س التي تنتمي لمجال الدالة.
- مساحة المنطقة الواقعة أسفل منحنى الدالة د وأعلى محور السينات تساوي الواحد الصحيح.

مثال

① إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي :

د(س) = { $\frac{١}{٦}$ (٢س - ١) ، ١ ⩽ س ⩽ ٣
صفر ، فيما عدا ذلك }

أ أثبت أن : ل (١ < س < ٣) = ١

ب أوجد : ل (س ⩽ ٢)، ل (س > ٢,٥)، ل (٢ ⩽ س ⩽ ٢,٥).



الحل



تذكر أن

مساحة المستطيل = الطول × العرض
مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع
مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ مجموع القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع

د (١) = $\frac{١}{٦}$ × (٢ - ١) = $\frac{١}{٦}$

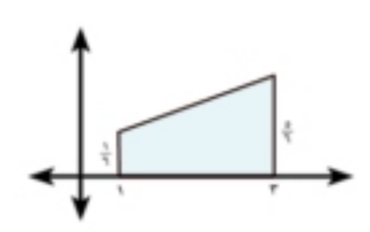
د (٣) = $\frac{١}{٦}$ × (٦ - ١) = $\frac{٥}{٦}$

د (٢) = $\frac{١}{٦}$ × (٤ - ١) = $\frac{٣}{٦}$

د (٢,٥) = $\frac{١}{٦}$ × (٥ - ١) = $\frac{٤}{٦}$

أ ل (١ ⩽ س ⩽ ٣) = $\frac{١}{٢}$ ($\frac{١}{٦}$ + $\frac{٥}{٦}$) × ٢

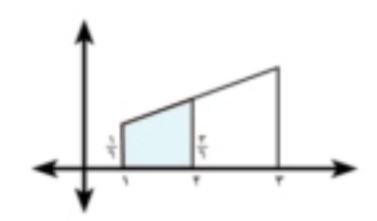
= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٦}{٦}$ × ٢ = ١

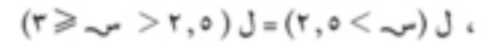


ب ل (س < ٢) = ل (١ ⩽ س ⩽ ٢)

= $\frac{١}{٢}$ ($\frac{١}{٦}$ + $\frac{٣}{٦}$) × ١

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٤}{٦}$ = $\frac{٤}{١٢}$ = $\frac{١}{٣}$





$$، \text{ل}(\text{س} > ٢,٥) = \text{ل}(٢,٥ < \text{س} \leq ٣)$$

$$= \frac{١}{٢}\left(\frac{٤}{٦} + \frac{٥}{٦}\right) \times \frac{١}{٢}$$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{٩}{٦} \times \frac{١}{٢} = \frac{٩}{٢٤} = \frac{٣}{٨}$$

$$، \text{ل}(٢ \leq \text{س} \leq ٢,٥) = \frac{١}{٢}\left(\frac{٣}{٦} + \frac{٤}{٦}\right) \times \frac{١}{٢}$$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{٧}{٦} \times \frac{١}{٢} = \frac{٧}{٢٤}$$

لاحظ أن: $\text{ل}(٢ \leq \text{س} \leq ٢,٥) = ١ - [\text{ل}(\text{س} \leq ٢) + \text{ل}(\text{س} \geq ٢,٥)]$

$$= ١ - \left(\frac{١}{٣} + \frac{٣}{٨}\right) = ١ - \frac{١٧}{٢٤} = \frac{٧}{٢٤}$$

حاول أن تحل

(٣) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا حيث :

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{١}{٥٠}(١٧ - ٢\text{س}) & \text{حيث } ١ < \text{س} < ٦ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أ) **أثبت أن** د(س) دالة كثافة للمتغير العشوائي س .

ب) **أوجد** $\text{ل}(\text{س} > ٣)$ ج) **أوجد** $\text{ل}(٤ < \text{س} < ٧)$

مثال

(٢) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا دالة كثافة الاحتمال له هو :

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{٢\text{س} + \text{ك}}{٢٤} & \text{حيث } ١ < \text{س} < ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أ) أوجد قيمة ك. ب) أوجد $\text{ل}(\text{س} > ٣)$

الحل

$$\because \text{ل}(١ < \text{س} < ٤) = ١$$

$$\therefore \frac{١}{٢} \times ٣ \times \frac{١٠ + ٢\text{ك}}{٢٤} = ١$$

$$\therefore \frac{١}{٢}\left(\frac{٢ + \text{ك}}{٢٤} + \frac{٨ + \text{ك}}{٢٤}\right) \times ٣ = ١$$

$$\therefore \text{ك} = ٣$$

$$، \text{د}(٣) = \frac{٦ + ٣}{٢٤} = \frac{٩}{٢٤} \qquad \text{د}(٤) = \frac{٨ + ٣}{٢٤} = \frac{١١}{٢٤} ،$$

$$\therefore \text{ل}(\text{س} > ٣) = \frac{١}{٦}\left(\frac{٩}{٢٤} + \frac{١١}{٢٤}\right) \times ١ = \frac{١}{٦} \times \frac{٢٠}{٢٤} = \frac{٥}{١٢}$$

حاول أن تحل

(٤) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا دالة كثافة الاحتمال له هو :

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{٢\text{س} + ١}{٢٨} & ١ < \text{س} < ٥ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أ أوجد قيمة أ إذا كان ل (س < أ) = $\frac{١}{٧}$ ب أوجد قيمة ب إذا كان ل (ب < س < ب + ٢) = $\frac{١}{٢}$

تمارين (٣ - ٣)

أولًا : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س هو :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٢} & حيث\ ٢ < س < ٤ \\ صفر & فيما\ عدا\ ذلك \end{cases}$$

فإن ل (س > ٣) =

أ $\frac{١}{٤}$ ب $\frac{١}{٢}$ جـ $\frac{٣}{٤}$ د ١

٢) إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س هو :

$$د(س) = \begin{cases} ك\ س & حيث\ ٢ < س < ٤ \\ صفر & فيما\ عدا\ ذلك \end{cases}$$

فإن ك =

أ $\frac{١}{٦}$ ب $\frac{١}{٣}$ جـ $\frac{١}{٢}$ د $\frac{٣}{٤}$

٣) إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س هو:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٦} & حيث\ -٣ < س < ٣ \\ صفر & فيما\ عدا\ ذلك \end{cases}$$

فإن ل (س = ٣) =

أ صفر ب $\frac{١}{٦}$ جـ $\frac{١}{٣}$ د $\frac{١}{٢}$

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الاتية :

٤) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا حيث:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س + ٣}{١٨} & حيث\ -٣ < س < ٣ \\ صفر & فيما\ عدا\ ذلك \end{cases}$$

أوجد : أولاً: ل (س < ٠) ثانيًا : ل (-١ < س < ٢)

٥) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٢س + ١}{٢٤} & حيث\ ٢ < س < ٥ \\ صفر & فيما\ عدا\ ذلك \end{cases}$$

أوجد : أولا : ل (٣ < س < ٥) ثانيًا : ل (س > ٤)

٦) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا حيث :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٢ (س + ١)}{٢٧} & حيث\ ٢ < س < ٥ \\ صفر & فيما\ عدا\ ذلك \end{cases}$$

أولا : أثبت أن د(س) دالة كثافة للمتغير العشوائى س. ثانيًا : أوجد ل (س < ٣)

⑦ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٢س + ١}{١٨} & \text{حيث } ١ < س < ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد : أولا : ل (سـ > ٣) ثانيًا : ل (٢ < سـ < ٤)

⑧ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} أ\,س & \text{حيث } ٠ < س < ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد : أولا : قيمة أ ثانيًا : ل (١ < سـ < ٣)

⑨ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٨}س + أ & \text{حيث } ٠ < س < ٤ \\ \text{صفر} & \text{، فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد : أولا : قيمة أ ثانيًا : ل (١ < سـ < ٣)

⑩ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{أس}{٢} & \text{حيث } ٠ < س < ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد : أولا : قيمة أ ثانيًا : ل (١ < سـ < ٣)

⑪ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س - ١}{ك} & \text{حيث } ١ < س < ٥ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد : أولا : قيمة ك ثانيًا : ل (٢ < سـ < ٣)

تفكير ابداعي:

⑫ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س}{٦} & \text{حيث } ٠ < س < ٢ \\ \frac{١}{٣} & \text{حيث } ٢ < س < ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

فاحسب: (أ) ل (١ < س < ٢) (ب) قيمة أ التى تجعل ل (٢ < سـ < أ) = ٠,٥

⑬ إذا كان سـ متغيرا عشوائيا متصلا، دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٣س + ١}{٤٠} & \text{حيث } ١ \leqslant س \leqslant ٥ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

وكان أ، ب ∈ [١، ٥] اوجد

(أ) قيمة أ اذا كان ل (أ < سـ < أ + ٢) = $\frac{٧}{٢٠}$ (ب) قيمة ب اذا كان ل (سـ > ب) = $\frac{٦٩}{٨٠}$

ملخص الوحدة

١ **المتغير العشوائى هو:**

دالة مجالها مجموعة عناصر فضاء العينة ف ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

٢ **المتغير العشوائى المتقطع (المنفصل أو الوثاب):**

مداه مجموعة محدودة (منتهية) أى قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية.

٣ **المتغير العشوائى المستمر (المتصل):**

مداه فترة من الأعداد الحقيقية (مغلقة أو مفتوحة)، أى إنها مجموعة غير قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية.

٤ **دالة التوزيعات الاحتمالية المتقطعة :**

إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متقطعًا مداه المجموعة: {س$_1$، س$_2$، س$_3$، ....، س$_ر$} فإن الدالة د المعرفة كالآتى:

د(س$_ر$) = ل (سـ = س$_ر$) لكل ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ......

تحدد ما يسمى بدالة التوزيعات الاحتمالية المتقطعة للمتغير العشوائى سـ والذى يعبر عنه بمجموعة الأزواج المرتبة المحددة لبيان الدالة د .

أى أن التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ = { (س$_1$ ، د(س$_1$)) ، (س$_2$ ، د(س$_2$)) ، (س$_3$ ، د(س$_3$)) ، .... ، (س$_ن$ ، د(س$_ن$))}

٥ **التوقع (المتوسط):**

التوقع هو القيمة التى تتمركز عندها معظم قيم المتغير العشوائى ويسمى أحيانًا « المتوسط » ويرمز له بالرمز (μ) ويقرأ (ميو).

فإذا كان سـ متغير عشوائيًا متقطعًا دالة التوزيع الاحتمالى له هى د ومداه هو:{ س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$ ، .... ، س$_ن$} باحتمالات د(س$_1$) ، د(س$_2$) ، د(س$_3$) ، .... ، د(س$_ن$) على الترتيب فإن التوقع يعطى بالعلاقة:

$$\text{التوقع } (\mu) = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر \times د(س_ر)$$

أى أن: التوقع (μ) = س$_1$ × د(س$_1$) + س$_2$ × د(س$_2$) + س$_3$ × د(س$_3$) + ...+ س$_ن$ × د(س$_ن$)

٦ **التباين:**

التباين لمتغير عشوائى متقطع سـ يقيس مقدار التشتت للمتغير العشوائى عن قيمته المتوقعة، ويرمز له بالرمز (σ^2) ويقرأ (سيجما تربيع) ويعطى بالعلاقة:

$$\sigma^2 = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 \times د(س_ر) - \mu^2$$

الانحراف المعيارى للمتغير العشوائى سـ هو الجذر التربيعى للتباين ويرمز له بالرمز σ ، ويلاحظ أن التباين والانحراف المعيارى كميات موجبة دائمًا.

٧ معامل الاختلاف:

يعرف معامل الاختلاف لأى مجموعة من المفردات بأنه النسبة المئوية بين الانحراف المعيارى للمجموعة والتوقع (المتوسط) لها و يتحدد كما فى العلاقة الآتية:

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{المتوسط}} \times ١٠٠\% = \frac{\sigma}{\mu} \times ١٠٠\%$$

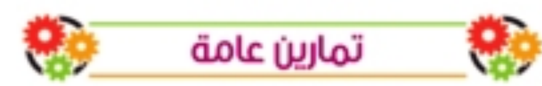
وهذا المعامل يصور تشتت المجموعة فى صورة نسبة مئوية مجردة من التمييز بحيث لا تتأثر بالوحدات المقيسة بها الظاهرة.

٨ دالة الكثافة الاحتمالية :

لأى متغير عشوائى متصل (مستمر) س توجد دالة حقيقية غير سالبة يرمز لها بالرمز د(س) تسمى دالة الكثافة الاحتمالية يمكن من خلالها إيجاد احتمالات الأحداث المعبرة عنها بواسطة المتغير العشوائى من خلال المساحة المحصورة أسفل منحنى الدالة وأعلى محور السينات ويتم حساب ل(أ < س < ب) بحساب مساحة الجزء المظلل من منحنى الدالة د بين القيمتين أ ، ب.

وتحقق هذه الدالة الشروط الآتية :

- د(س) ≥ ٠ لجميع قيم س التي تنتمى لمجال الدالة د.
- مساحة المنطقة الواقعة أسفل منحنى الدالة د وأعلى محور السينات تساوى الواحد الصحيح.



تمارين عامة

أولًا : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الآتية :

① القيمة المتوقعة للتوزيع الاحتمالى التالى هى :

$س_ر$	صفر	١	٢
$د(س_ر)$	٠,٢	٠,٣	٠,٥

(أ) ١ (ب) ١,١٤ (جـ) ١,٣ (د) ١,٥

② إذا كان التوقع فى التوزيع الاحتمالى التالى :

$س_ر$	١	٢	ك
$د(س_ر)$	٠,١	٠,٨	٠,١

يساوى ٢ فإن قيمة ك تساوى

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

③ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} ك & \text{حيث } -٤ < س < ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

فإن ك =

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) صفر (د) ٤

ثانيًا : اجب عن الأسئلة الآتية

④ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متقطعًا مداه = {-٣ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٣ }وكانت قيم ل (سـ = -٣) = ل (سـ = ٣) = $\frac{١}{٩}$ ، ل (سـ = ٠) = $\frac{٤}{٩}$ ، ل (سـ = -١) = ل (سـ = ١) فأوجد دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى.

⑤ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متقطعًا و دالة توزيعه الاحتمالى يتحدد بالدالة د(س) = $\frac{س + ٤}{١٦}$ حيث س = -٢ ، م ، ١ ، ٢ أوجد قيمة الثابت م، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير سـ

⑥ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متقطعًا توزيعه الاحتمالى يتحدد بالدالة د(س) = $\frac{أ س^{٢}}{٢}$ حيث س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ فأوجد قيمة أ ثم أوجد ل (سـ $\geqslant$ ٢).

⑦ فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فى كل مرة ، أوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى الذى يعبر عن أكبر العددين الظاهرين على الوجهين العلويين.

(٨) صمم حجر نرد بحيث يحمل وجهان منه الرقم ١ ، ووجهان الرقم ٣ ، ووجهان الرقم ٥ ، ألقى هذا الحجر مرتين متتاليتين وملاحظة الرقم الذى يظهر على الوجه العلوى فى كل مرة ، فإذا كان المتغير العشوائى س يعبر عن « الفرق المطلق بين الرقمين الظاهرين ».

أوجد : أولا : التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س.

ثانيًا : احتمال أن يكون الفرق المطلق بين الرقمين أقل من ٤ .

(٩) حجرا نرد منتظمان، الأول كتب على كل وجهين متقابلين أحد الأعداد {١، ٣، ٥} والثانى كتب على كل وجهين متقابلين أحد الأعداد {٢ ، ٤ ، ٦} فإذا ألقي الحجران وكان المتغير العشوائي س يعبر عن مجموع العددين فأوجد دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير س واحسب المتوسط والانحراف المعيارى للمتغير س.

(١٠) صندوقان أ ، ب بكل منهما أربع كرات مرقمة من ١ إلى ٤ ، سحبت كرة عشوائيًا من كل صندوق ، فإذا كان المتغير العشوائى « مجموع العددين على الكرتين المسحوبتين » فأوجد دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير س واحسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى.

(١١) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متوسطه μ = ٢ وتوزيعه الاحتمالى كالآتى :

$س_ر$	١	٠	٢	أ
د($س_ر$)	$\frac{١}{١٢}$	ب	$\frac{١}{٣}$	$\frac{٥}{١٢}$

أولا : احسب قيمتى أ ، ب　　　　**ثانيًا** : احسب الانحراف المعيارى

(١٢) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هى :

د(س) = { $\frac{س + ٢}{١٦}$ حيث ٠ < س < ٤
　　　　صفر　فيما عدا ذلك

أوجد : أولا : ل (س < ٢)　　　　**ثانيًا** : ل (١ < س < ٤)

(١٣) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هى :

د(س) = { $\frac{س + ١}{٨}$ حيث أ < س < أ + ٢
　　　　صفر　فيما عدا ذلك

أوجد : أولا : قيمة أ　　　　**ثانيًا** : ل (س < ٣)



١) فى لعبة القرص ذى المؤشر الدوار قسم القرص إلى ١٦ قطاعًا متطابقا ومرقما بالأعداد من ١ إلى ١٦، ما احتمال استقرار المؤشر على عدد فردى إذا علم أنه استقر على عدد أكبر من ٥؟

٢) **الربط بالطرق** : الجدول التالى يبين التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث المتوقعة خلال أحد الأيام الممطرة على الطرق.

عدد الحوادث	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦
الاحتمال	٠,١	٠,٢٦	٠,٣١	٠,١٤	٠,١١	٠,٠٦	٠,٠٢

احسب القيمة المتوقعة لعدد هذه الحوادث.

٣) **الربط بالإعلام** : سجلت إحدى المواقع الإلكترونية مسحًا لبرامج التلفاز التى يشاهدها المشاهدون بشكل رئيسى فكانت كما فى الجدول الآتى :

نوع البرامج	ثقافية	اجتماعية	إخبارية	رياضية	ترفيهية	أخرى
احتمال وقوعها	٠,١٤	٠,٢	٠,٢٤	٠,١٨	٠,١٦	٠,٠٨

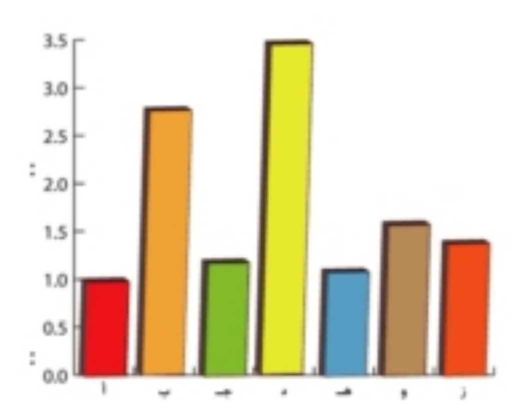
أ) مثل هذه البيانات بالأعمدة

ب) أثبت أن هذه البيانات تمثل توزيعًا احتماليًّا

جـ) إذا اختير أحد المشاهدين لهذه البرامج عشوائيًّا فأوجد احتمال أن تكون مشاهدته للبرامج الاجتماعية أو الرياضية.

د) اكتب بحثًا عن أثر الإعلام فى تكوين ثقافة المجتمع.

٤) **الربط بالرياضة** : اشترك ٧ متسابقين فى سباق المسافات القصيرة فكان احتمال الفوز بهذا السباق كما فى التمثيل البيانى الآتى



أ) بين أن هذه التوزيعات تمثل توزيعًا احتماليًّا.

ب) أوجد احتمال أن يفوز ب ، أ ، هـ فى هذا السباق.

٥) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هى

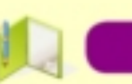
$$د(س) = \begin{cases} \frac{س + ١}{١٢} & \text{حيث } ٠ < س < ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد : **أولا** : $ل(سـ < ٢)$ **ثانيًا** : $ل(٢ < سـ < ٥)$

التوزيع الطبيعى

Normal Distribution

الوحدة ٤



مقدمة الوحدة

يعد التوزيع الطبيعى من أهم التوزيعات الاحتمالية التى تدرس فى مقررات الإحصاء نظرًا لاستخداماتها المختلفة لنواتج بعض العمليات فى العلوم الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية حيث يتعامل مع معظم الظواهر فى حياتنا اليومية، وكان أول من استخدم التوزيع الطبيعى العالم الفرنسى إبراهام دى موافر (Abraham de Moivre) عام ١٧٥٦ م فى إحدى مطبوعاته، كما شارك فى تطويره عدد من العلماء من أشهرهم العالم الألمانى كارل فريدك جاوس (Carl Friedrich Gauss) (١٧٧٧ م – ١٨٥٥ م) والذى يسمى التوزيع الطبيعى أحيانًا باسمه (منحنى جاوس أو منحنى الجرس).



إبراهام دى موافر



كارل فريدك جاوس

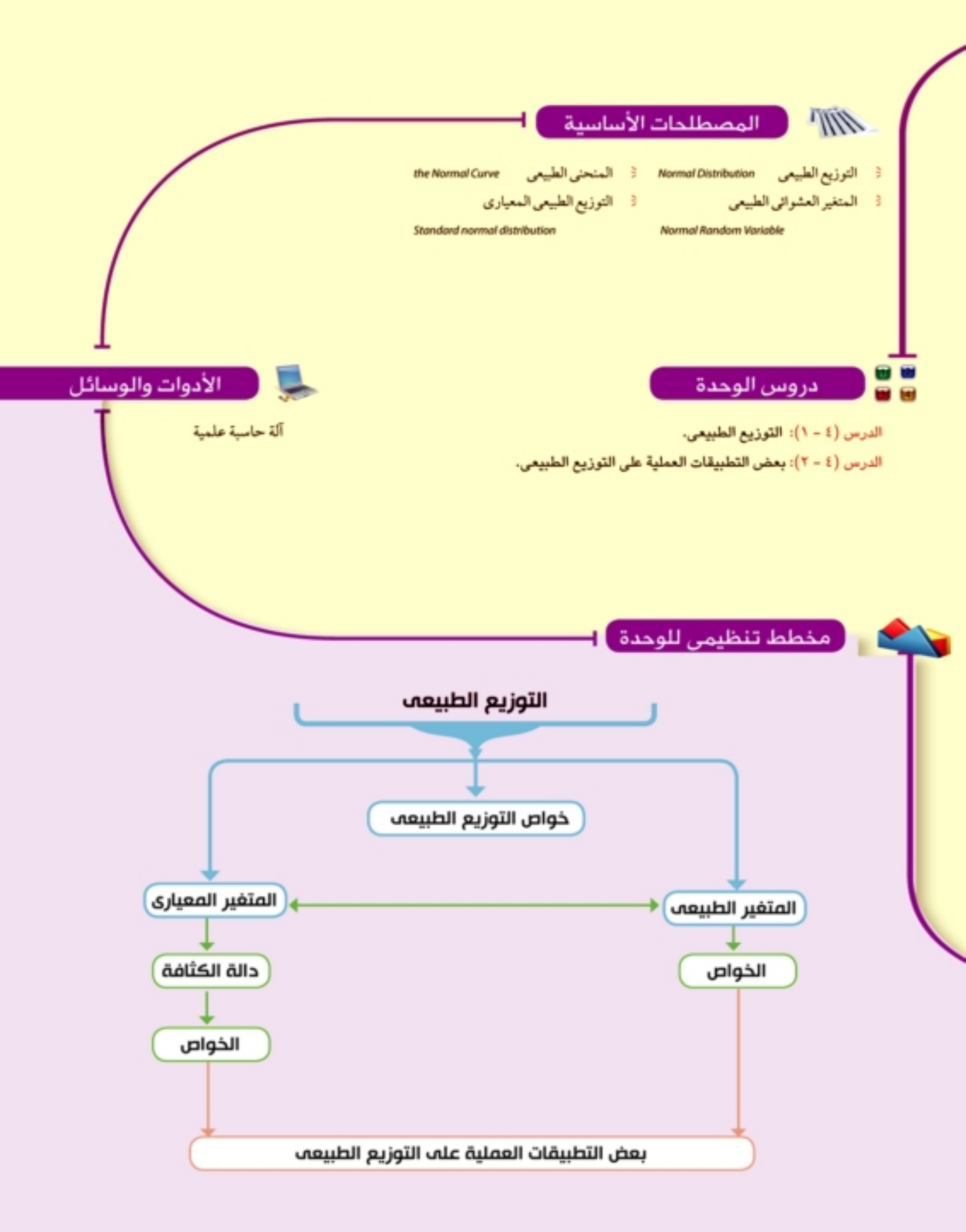
ومن أشهر تطبيقات التوزيع الطبيعى التقييم الإدارى للمرؤوسين وذلك لضمان قدر من العدالة، كما يستخدم فى دراسة البواقى لتحليل الانحدار، كما أن له علاقة وطيدة فى خرائط الضبط (Control Charts) وغيرها.



أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف التوزيع الطبيعى الاعتدالى وخواصه.
- يحسب احتمال المتغير المعيارى .
- يحسب احتمال المتغير الطبيعى غير المعيارى .
- يتعرف المتغير العشوائى الطبيعى المعيارى، والشكل العام للمنحنى الممثل لدالة الكثافة لهذا المتغير .
- يحول أى متغير عشوائى طبيعى إلى متغير طبيعى معيارى .
- يوجد قيم احتمالات متغير عشوائى له توزيع طبيعى معيارى باستخدام الجداول الإحصائية .
- يصف خواص منحنى التوزيع الطبيعى، وبعض الظواهر التى يعبر عنها.
- يفسر نتائج حصل عليها من حساب الاحتمال لمتغير عشوائى طبيعى .



المصطلحات الأساسية

- التوزيع الطبيعى *Normal Distribution*
- المنحنى الطبيعى *the Normal Curve*
- المتغير العشوائى الطبيعى *Normal Random Variable*
- التوزيع الطبيعى المعيارى *Standard normal distribution*

دروس الوحدة

الدرس (٤ - ١): التوزيع الطبيعى.

الدرس (٤ - ٢): بعض التطبيقات العملية على التوزيع الطبيعى.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

مخطط تنظيمى للوحدة

الوحدة الرابعة

٤ - ١

التوزيع الطبيعى

Normal Distribution

سوف تتعلم

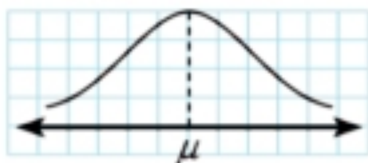
- المتغير العشوائى الطبيعى
- بعض خواص المنحنى الطبيعى
- التوزيع الطبيعى المعيارى
- خواص دالة الكثافة للتوزيع الطبيعى المعيارى
- حساب الاحتمال للمتغير الطبيعى المعيارى.

المصطلحات الأساسية

- التوزيع الطبيعى *Normal Distribution*
- المنحنى الطبيعى *Normal Curve*
- المتغير العشوائى الطبيعى *Normal Random Variable*
- التوزيع الطبيعى المعيارى *Standard normal distribution*

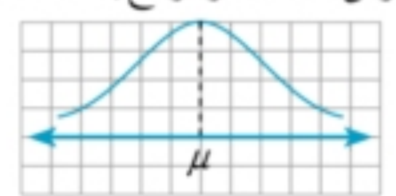
مقدمة:

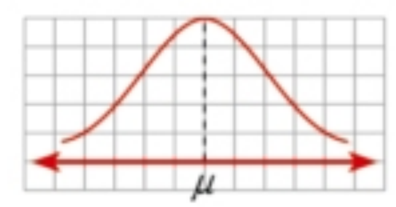
يعد التوزيع الطبيعى من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة لما له من خواص نظرية هامة ، كما يمكن لنواتجه أن تأخذ أى قيمة فى فترة من الأعداد الحقيقية ومثال ذلك أطوال البالغين وأوزان الأطفال عند الولادة ودرجة الذكاء عند الإنسان .... إلخ و يوصف التوزيع الطبيعى بمعادلة رياضية تحدد منحناه وهى تتعين تعيينًا تامًا بمعرفة التوقع (المتوسط) μ والانحراف المعيارى σ و يشبه هذا المنحنى شكل الجرس وهو متماثل حول المستقيم س = μ و يتقارب طرفاه من المحور الأفقى حيث يمتد طرفاه إلى مالا نهاية كما هو موضح بالشكل المقابل.



المتغير العشوائى الطبيعى: *Normal Random Variable*

يقال للمتغير العشوائى المتصل س إنه "متغير عشوائى طبيعى " إذا كان مداه يتحدد بالفترة] - ∞ ، ∞ [ودالة الكثافة الاحتمالية له تمثل بمنحنى يتخذ دائمًا شكل الناقوس (الجرس) و يسمى منحنى دالة الكثافة بالمنحنى الطبيعى أو "منحنى جاوس " و يتحدد شكل المنحنى الطبيعى بمعرفة قيمتين أساسيتين هما : المتوسط μ والانحراف المعيارى σ للمتغير العشوائى س كما هو موضح بالأشكال التالية .





بعض خواص المنحنى الطبيعى *Some Properties of the Normal Curve*

(١) له قمة واحدة وطرفاه يمتدان إلى - ∞ ، ∞ .

(٢) له محور تماثل يمر بالقمة و يقطع المحور الأفقى عند س = μ .

(٣) مساحة المنطقة الواقعة أسفل المنحنى الطبيعى وفوق محور السينات تساوى الواحد الصحيح .

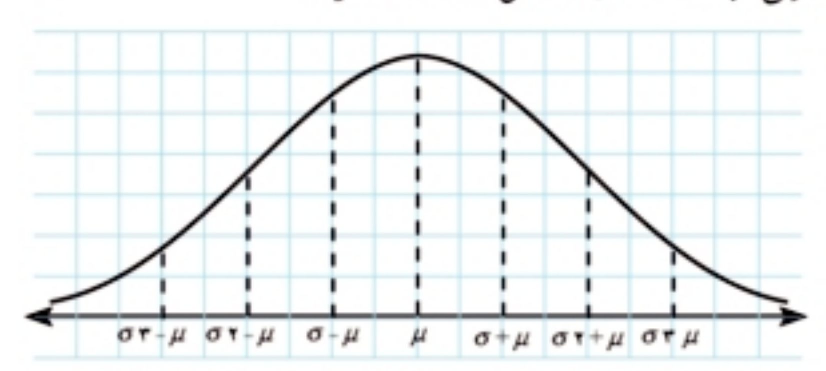
(٤) من التماثل نجد أن المستقيم س = μ يقسم المساحة الواقعة تحت المنحنى وفوق محور السينات إلى منطقتين مساحة كل منهما = ٠,٥ .

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.

(٥) يمكن حساب المساحة التقريبية للمنطقة أسفل المنحنى وأعلى محور السينات تبعًا للفترات الآتية :

- من $\mu - \sigma$ إلى $\mu + \sigma$ = ٦٨,٢٦ ٪ من المساحة الكلية .
- من $\mu - ٢\sigma$ إلى $\mu + ٢\sigma$ = ٩٥,٤٤ ٪ من المساحة الكلية .
- من $\mu - ٣\sigma$ إلى $\mu + ٣\sigma$ = ٩٩,٧٤ ٪ من المساحة الكلية .



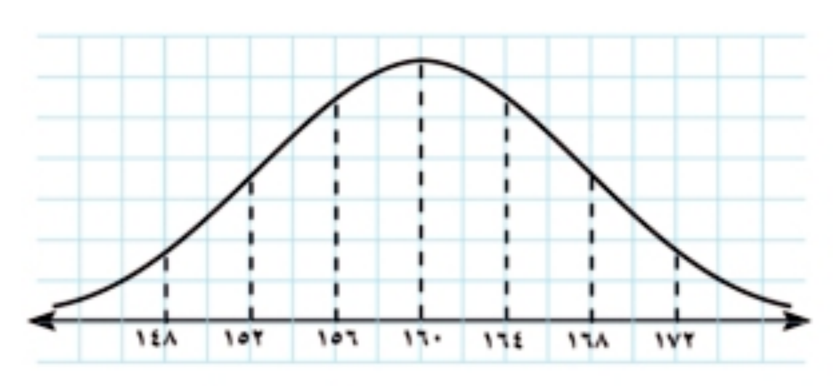
لاحظ أن: يجب أن يكون عدد البيانات كبيرًا حتى يكون التوزيع الطبيعي تقريبيًا .

مثال

① إذا كان أطوال طلاب إحدى المدارس يتبع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط ١٦٠ سم ، انحراف معيارى ٤ سم .اختير أحد الطلاب عشوائيًا أوجد احتمال أن يكون :

أ أكبر من ١٧٢ سم **ب** أقل من ١٥٦ سم **جـ** محصور بين ١٥٦ سم ، ١٦٨ سم


الحل



من المعطيات نجد أن : المتوسط μ = ١٦٠ ، الانحراف المعيارى σ = ٤

بمقارنة البيانات مع منحنى التوزيع الطبيعي نجد أن: μ + ٣ س = ١٦٠ + ٣ × ٤ لذلك فإن

أ ل(س > ١٧٢) = ل(س > $\mu + ٣\sigma$)

∵ المساحة من $\mu - ٣\sigma$ إلى $\mu + ٣\sigma$ = ٠,٩٩٧٤

∴ المساحة من μ إلى $\mu + ٣\sigma$ = ٠,٩٩٧٤ ÷ ٢ = ٠,٤٩٨٧

∴ المساحة على يمين $\mu + ٣\sigma$ = ٠,٥ - ٠,٤٩٨٧ = ٠,٠٠١٣

ب ل(س < ١٥٦) = ل(س < $\mu - \sigma$)

∵ المساحة من $\mu - \sigma$ إلى $\mu + \sigma$ = ٠,٦٨٢٦ ∴ المساحة من μ إلى $\mu - \sigma$ = ٠,٦٨٢٦ ÷ ٢ = ٠,٣٤١٣

∴ المساحة على يسار $\mu - \sigma$ = ٠,٥ - ٠,٣٤١٣ = ٠,١٥٨٧

جـ ل(١٥٦ < س < ١٦٨) = ل($\mu - \sigma$ < س < $\mu + ٢\sigma$)

= ل($\mu - \sigma$ < س < μ) + ل(μ < س < $\mu + ٢\sigma$)

= $\frac{٠,٦٨١٦}{٢} + \frac{٠,٩٥٤٤}{٢}$ = ٠,٣٤٠٨ + ٠,٤٧٧٢ = ٠,٨١٨

حاول أن تحل

(١) إذا كان أوزان الطلاب فى إحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًا متوسطه μ = ٦٨ كجم وتباينه ١٦ كجم² فأوجد:

أ احتمال أن يكون الوزن أكبر من ٧٢ كجم

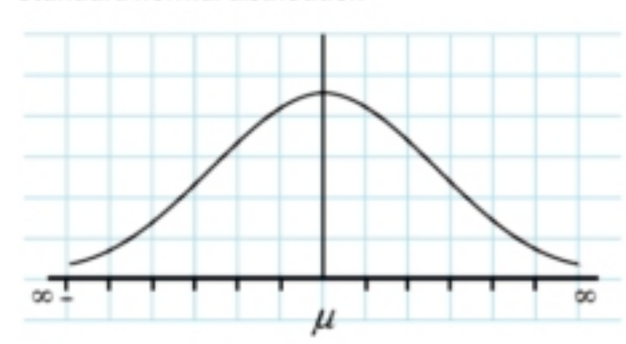
ب النسبة المئوية للطلاب الذين تقع أوزانهم بين ٦٤ كجم ، ٧٢ كجم "وزن كل منهم"

جـ عدد الطلاب الذين يزيد وزنهم عن ٦٤ كجم إذا كان عدد طلاب الكلية ٢٠٠٠ طالب.

التوزيع الطبيعى المعيارى

Standard normal distribution

لاحظنا فى التوزيع الطبيعى أنه عند إيجاد الاحتمال تكون أطوال الفترات من مضاعفات الانحراف المعيارى حتى يمكن حساب الاحتمال ، لذلك كان من المناسب تحويل التوزيعات الطبيعية إلى توزيعات طبيعية معيارية وذلك بتحويل قيم (س) إلى قيم معيارية (ص) وذلك بمعلومية المتوسط (μ) والانحراف المعيارى (σ) ، عندها يكون: μ = ٠ ، σ = ١



تعريف

إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س هو التوزيع الطبيعى بمتوسط μ وانحراف معيارى σ

فإن: ص = $\frac{س - \mu}{\sigma}$ هو توزيع طبيعى معيارى. متوسطة μ = صفر وانحرافه المعيارى σ = ١

بعض خواص دالة الكثافة للتوزيع الطبيعى المعيارى (ص):

(١) المنحنى يقع أعلى المحور الأفقى (محور السينات).

(٢) متماثل بالنسبة للمحور الرأسى (محور الصادات).

(٣) طرفا المنحنى يمتدان إلى ما لا نهاية دون أن يلتقيا بالمحور الأفقى.

(٤) مساحة المنطقة أسفل المنحنى وفوق المحور الأفقى = ١

(٥) من التماثل نجد أن المحور الرأسى يقسم المساحة الواقعة تحت المنحنى وفوق المحور الأفقى إلى منطقتين مساحة كل منها = ٠,٥

(٦) يمكن حساب المساحة التقريبية للمنطقة أسفل المنحنى المعيارى فقط وفوق أى فترة] أ ، ب [بواسطة جداول خاصة.

جدول المساحة أسفل منحنى التوزيع الطبيعى المعيارى :

Table of the area under the standard normal distribution curve

لتحويل التوزيع الطبيعى س إلى توزيع طبيعى معيارى ص نستخدم العلاقة :

ص = $\frac{س - \mu}{\sigma}$ ومن جدول التوزيع الطبيعى المعيارى المرفق فى نهاية الكتاب يمكن إيجاد المساحة المطلوبة .

وفيما يلى نوضح كيفية الكشف فى جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعى المعيارى .

ى	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠						٠,٠١٩٩				
٠,١										
٠,٢										
٠,٣										
٠,٤	٠,١٥٥٤									
٠,٥										
٠,٦				٠,٢٣٥٧						
٢,٥								٠,٤٩٤٩		
٣,٥										

ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٠,٠٥) = المساحة تحت المنحنى الطبيعى المعيارى فوق الفترة [٠ ، ٠,٠٥] أى أن ى = ٠,٠٥ ، لذلك نبحث فى الجدول بالصف ٠,٠٠ وتحت العمود ٠,٠٥ فنجد العدد هو ٠,٠١٩٩

∴ ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٠,٠٥) = ٠,٠١٩٩

ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٠,٤) = المساحة تحت المنحنى الطبيعى المعيارى فوق الفترة [٠ ، ٠,٤] أى أن ى = ٠,٤ ، لذلك نبحث فى الجدول بالصف أمام ٠,٤ وتحت العمود ٠,٠٠ فنجد العدد ٠,١٥٥٤

∴ ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٠,٤) = ٠,١٥٥٤

ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٠,٦٣) = المساحة تحت المنحنى الطبيعى المعيارى فوق الفترة [٠ ، ٠,٦٣] أى أن ى = ٠,٦٣ ، لذلك نبحث فى الجدول بالصف أمام ٠,٦ وتحت العمود ٠,٠٣ فنجد العدد ٠,٢٣٥٧

∴ ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٠,٦٣) = ٠,٢٣٥٧

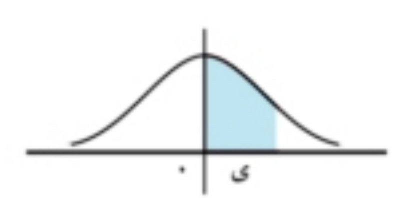
ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٢,٥٧) = المساحة تحت المنحنى الطبيعى المعيارى فوق الفترة [٠ ، ٢,٥٧] أى أن ى = ٢,٥٧ ، لذلك نبحث فى الجدول بالصف أمام ٢,٥ وتحت العمود ٠,٠٧ فنجد العدد ٠,٤٩٤٩

∴ ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٢,٥٧) = ٠,٤٩٤٩

حساب الاحتمال للمتغير الطبيعى المعيارى:

Calculating the probability of the standard normal variable

(١) إيجاد مساحة المنطقة تحت المنحنى فى الفترة [٠ ، ى] من الجدول



جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعى المعيارى يعطى المساحة التقريبية فوق الفترة [٠ ، ى] وأسفل المنحنى الطبيعى حيث ى ≤ ٠ ، أى أن الجدول يعطينا مباشرة: ل (٠ ≤ ص ≤ ى)

فمثلًا: ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٣) = ٠,١١٧٩ ، ل (٠ < ص ≤ ٠,٦٤) = ٠,٢٣٨٩

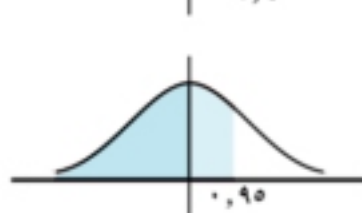
، ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٧) = ٠,٤٥٥٤ ، ل (٠ ≤ ص < ٢,٤٥) = ٠,٤٩٢٩



لاحظ أن: ل(ص ≥ ١,٤) = ٠,٥ - ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٤)

= ٠,٥ - ٠,٤١٩٢

= ٠,٠٨٠٨

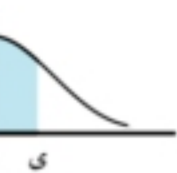


بالمثل: ل(ص ≤ ٠,٩٥) = ٠,٥ + ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٩٥)

= ٠,٥ + ٠,٣٢٨٩

= ٠,٨٢٨٩

(٢) إيجاد مساحة المنطقة تحت المنحنى فى الفترة [- ى ، ٠] من الجدول



من تماثل المنحنى الطبيعى المعيارى حول المحور الرأسى نجد أن :

ل (-ى ≤ ص ≤ ٠) = ل (٠ ≤ ص ≤ ى)

فمثلًا: ل (-١,٢٥ ≤ ص ≤ ٠) = ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٢٥) = ٠,٣٩٤٤

، ل (-٢,٢٤ ≤ ص ≤ ٠) = ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,٢٤) = ٠,٤٨٧٥

، ل (ص ≤ -١,٦) = ٠,٥ - ل (-١,٦ ≤ ص ≤ ٠)

= ٠,٥ - ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٦)

= ٠,٥ - ٠,٤٤٥٢ = ٠,٠٥٤٨

، ل (ص ≥ -٢,٣٢) = ٠,٥ + ل (-٢,٣٢ ≤ ص ≤ ٠)

= ٠,٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,٣٢)

= ٠,٥ + ٠,٤٨٩٨ = ٠,٩٨٩٨

ملاحظة: ل (-ى ≤ ص ≤ ى) = ٢ × ل (٠ ≤ ص ≤ ى)



فمثلًا: ل(-١,٤ ≤ ص ≤ ١,٤) = ٢ × ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٤) = ٢ × ٠,٤١٩٢

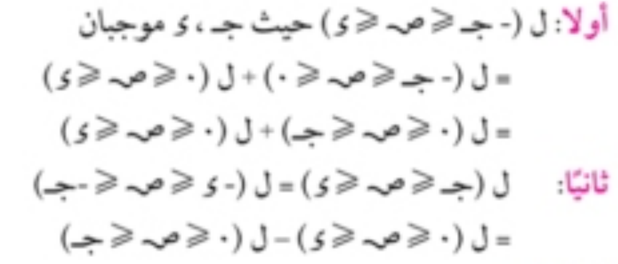
= ٠,٨٣٨٤

، ل(-٢,٠ ≤ ص ≤ ٢,٠) = ٢× ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,٠) = ٢ × ٠,٤٧٧٢ = ٠,٩٥٤٤

(٣) إيجاد مساحة المنطقة تحت المنحنى فى أى فترة [جـ ، ء] :

فى هذه الحالة يفضل الاستعانة برسم المنحنى المعيارى مع ملاحظة أن المحور الرأسى يقسم المساحة تحت المنحنى وفوق المحور الأفقى إلى منطقتين متساويتين فى المساحة ومساحة كل منهما = ٠,٥ .





أولا: ل (- جـ ≤ ص ≤ ء) حيث جـ ، ء موجبان

= ل (- جـ ≤ ص ≤ ٠) + ل (٠ ≤ ص ≤ ء)

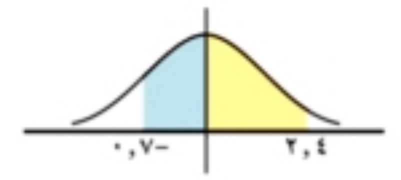
= ل (٠ ≤ ص ≤ جـ) + ل (٠ ≤ ص ≤ ء)

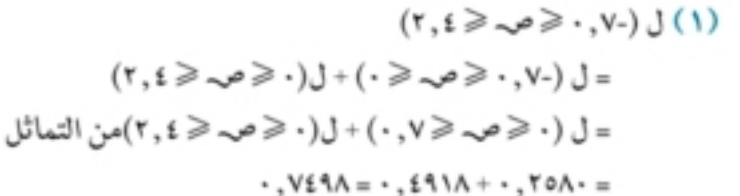


ثانيًا: ل (جـ ≤ ص ≤ ء) = ل (- ء ≤ ص ≤ -جـ)

= ل (٠ ≤ ص ≤ ء) - ل (٠ ≤ ص ≤ جـ)

فمثلا :





(١) ل (-٠,٧ ≤ ص ≤ ٢,٤)

= ل (-٠,٧ ≤ ص ≤ ٠) + ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,٤)

= ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٧) + ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,٤) من التماثل

= ٠,٢٥٨٠ + ٠,٤٩١٨ = ٠,٧٤٩٨

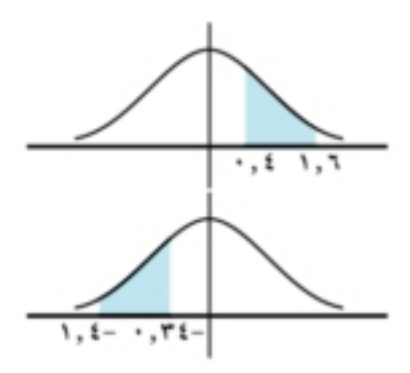


(٢) ل (-١,٦٢ < ص ≤ ٠,٤٤)

= ل (-١,٦٢ < ص ≤ ٠) + ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٤٤)

= ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٦٢) + ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٤٤) من التماثل

= ٠,٤٤٧٤ + ٠,١٧٠٠ = ٠,٦١٧٤



(٣) ل (٠,٤ ≤ ص < ١,٦) = ل (٠ ≤ ص < ١,٦) - ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٤)

= ٠,٤٤٥٢ - ٠,١٥٥٤ = ٠,٢٨٩٨

(٤) ل (- ١,٤ < ص < -٠,٣٤)

= ل (- ١,٤ < ص ≤ ٠) - ل (-٠,٣٤ < ص ≤ ٠)

= ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٤) + ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٣٤) من التماثل

= ٠,٤١٩٢ - ٠,١٣٣١ = ٠,٢٨٦١

مثال

إيجاد المساحة أسفل المنحنى الطبيعى المعيارى

٢ إذا كان ص متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا فأوجد:



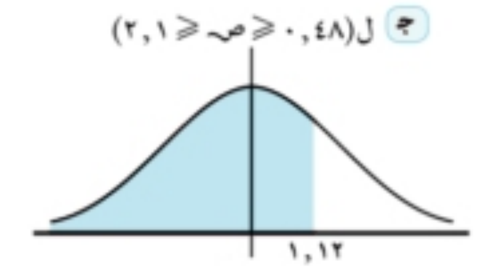
أ ل (ص ≤ ١,١٢) ب ل (ص ≥ ١,٦٤) جـ ل (٠,٤٨ ≤ ص ≤ ٢,١)

الحل



أ ل (ص ≤ ١,١٢) = ل (٠ ≤ ص ≤ ١,١٢) + ل (ص ≤ ٠)

= ٠,٣٦٨٦ + ٠,٥ = ٠,٨٦٨٦



ب ل(ص ≥ ١,٦٤)

= ل(ص ≥ ٠) - ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٦٤)

= ٠,٥ - ٠,٤٤٩٥ = ٠,٠٥٠٥



ج ل(٠,٤٨ ≤ ص ≤ ٢,١)

= ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,١) - ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٤٨)

= ٠,٤٨٢١ - ٠,١٨٤٤ = ٠,٢٩٧٧







حاول أن تحل

(٢) إذا كان ص متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا فأوجد:

أ ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٨٢)　　ب ل(ص ≥ ٢,٣٢)

ج ل(ص ≤ ١,٦٤)　　د ل(١,٠٨ ≤ ص ≤ ٣,١٢)

مثال

(٢) إذا كان ص متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا فأوجد:

أ ل(ص ≤ -٠,٥٦)　　ب ل(ص ≥ -١,٠٦)

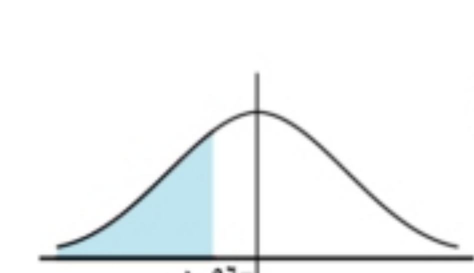
ج ل(-١,٢ ≤ ص ≤ ٢,٤٨)　　د ل(-٢,٢ ≤ ص ≤ -٠,٤٦)

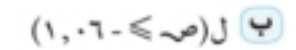
الحل

أ ل(ص ≤ -٠,٥٦)

= ل(ص ≥ ٠,٥٦)

= ٠,٥ - ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٥٦) = ٠,٥ - ٠,٢١٢٣ = ٠,٢٨٧٧



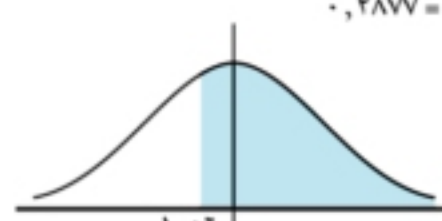


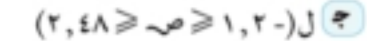
ب ل(ص ≥ -١,٠٦)

= ل(ص ≤ ١,٠٦)

= ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٠٦) + ٠,٥

= ٠,٠٦٣٦ + ٠,٥ = ٠,٥٦٣٦





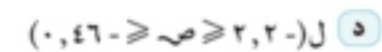
ج ل(-١,٢ ≤ ص ≤ ٢,٤٨)

= ل(-١,٢ ≤ ص ≤ ٠) + ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,٤٨)

= ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٢) + ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,٤٨)

= ٠,٣٨٤٩ + ٠,٤٩٣٤ = ٠,٨٧٨٣





د ل(-٢,٢ ≤ ص ≤ -٠,٤٦)

= ل(-٢,٢ ≤ ص ≤ ٠) - ل(-٠,٤٦ ≤ ص ≤ ٠)

= ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,٢) - ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٤٦)

= ٠,٤٨٦١ - ٠,١٧٧٢ = ٠,٣٠٨٩

حاول أن تحل

٣ إذا كان ص متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا فأوجد :

أ ل(ص ≤ -٠,٥٦)

ب ل(ص ≥ -١,٠٦)

ج ل(-١,٢ ≤ ص ≤ ٢,٤٨)

د ل(-٢,٢ ≤ ص ≤ -٠,٤٦)

مثال

التحويل من متغير طبيعي إلى متغير طبيعي معياري

٤ إذا كان س متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه μ وانحرافه المعياري σ . أوجد :

أ ل(س > μ - ١,٥σ)

ب ل(س < μ - ٠,٥σ)



ج ل(μ - ١,٩٦σ < س < μ + ١,٩٦σ)

الحل

أ ل(س > μ - ١,٥σ) = ل(ص > $\frac{\mu - 1{,}5\sigma - \mu}{\sigma}$) = ل(ص > -١,٥)

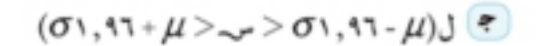
= ل(-١,٥ < ص < ٠) + ٠,٥

= ل(٠ < ص < ١,٥) + ٠,٥ = ٠,٤٣٣٢ + ٠,٥ = ٠,٩٣٣٢

ب ل(س < μ - ٠,٥σ) = ل(ص < $\frac{\mu - 0{,}5\sigma - \mu}{\sigma}$)

= ل(ص < -٠,٥) = ل(ص > ٠,٥)

= ٠,٥ - ل(٠ < ص < ٠,٥) = ٠,٥ - ٠,١٩١٥ = ٠,٣٠٨٥

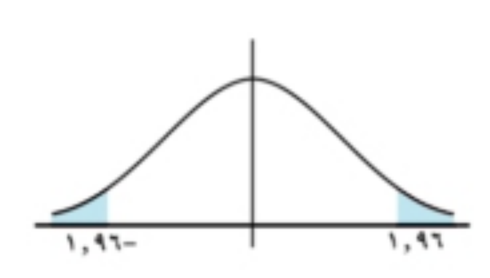


ج ل(μ - ١,٩٦σ < س < μ + ١,٩٦σ)

= ل($\frac{\mu - 1{,}96\sigma - \mu}{\sigma}$ < ص < $\frac{\mu + 1{,}96\sigma - \mu}{\sigma}$)

= ل(-١,٩٦ < ص < ١,٩٦)

= ٢ ل(٠ < ص < ١,٩٦) = ٢ × ٠,٤٧٥٠ = ٠,٩٥



حاول أن تحل

٤ إذا كان س متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه μ وانحرافه المعياري σ . أوجد :

أ ل(س < μ - ٢,١σ)

ب (س > μ + ٠,٨σ)

ج ل(μ - ١,٤٨σ < س < μ + ١,٤٨σ)

مثال

⑤ إذا كان صـ متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا فأوجد قيمة ك فى كل من الحالات الآتية :

أ ل (صـ ≥ ك) = ٠,١٠٥٦ ب ل (صـ ≤ ك) = ٠,١١٥١

جـ ل (-٠,٤٤ ≤ صـ ≤ ك) = ٠,٥٥٨٨ د ل (ك ≤ صـ ≤ ٢,١) = ٠,٢٩٠٦

الحل

أ نلاحظ أن : المساحة < ٠,٥ ، علامة المتباينة "أكبر من" لذلك فإن ك تقع فى الفترة الموجبة كما هو موضح بالشكل المقابل .

∵ ل (صـ ≥ ك) = ٠,١٠٥٦

∴ ٠,٥ - ل (٠ ≤ صـ ≤ ك) = ٠,١٠٥٦

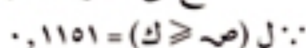
∴ ل (٠ ≤ صـ ≤ ك) = ٠,٥ - ٠,١٠٥٦ = ٠,٣٩٤٤

نبحث فى جداول المساحات عن العدد (ى) أو أقرب عدد إليه يناظر المساحة ٠,٣٩٤٤ فنجده ١,٢ تحت الفروق ٠,٠٥ **أى أن : ك = ١,٢٥**

ك

ب نلاحظ أن : المساحة < ٠,٥ ، علامة المتباينة "أقل من" لذلك فإن ك تقع فى الفترة السالبة كما هو موضح بالشكل المقابل.

ك



∵ ل (صـ ≤ ك) = ٠,١١٥١

ومن التماثل فى المنحنى نجد أن : ل (صـ ≥ ك) = ٠,١١٥١

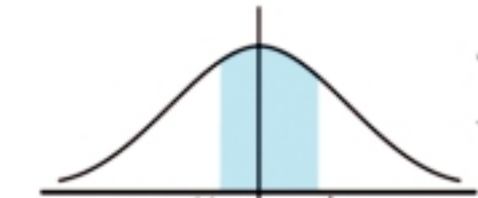
∴ ٠,٥ - ل (٠ ≤ صـ ≤ ك) = ٠,١١٥١

∴ ل (٠ ≤ صـ ≤ ك) = ٠,٥ - ٠,١١٥١ = ٠,٣٨٤٩

∴ ك = - ١,٢ (لاحظ أن ك تقع فى الجزء السالب)

جـ نلاحظ أن:

المساحة > ٠,٥ وأحد طرفى الفترة يقع فى الفترة السالبة، لذلك يكون الطرف الآخر للفترة ى يقع فى الفترة الموجبة كما هو موضح بالشكل الجانبى .



∵ ل (-٠,٤٤ ≤ صـ ≤ ك) = ٠,٥٥٨٨

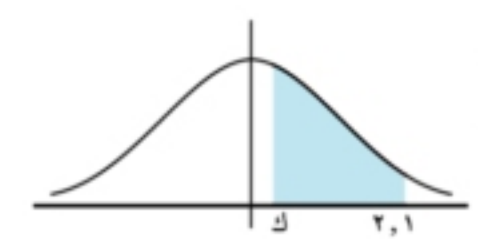
∴ ل (-٠,٤٤ ≤ صـ ≤ ٠) + ل (٠ ≤ صـ ≤ ك) = ٠,٥٥٨٨

∴ ل (٠ ≤ صـ ≤ ٠,٤٤) + ل (٠ ≤ صـ ≤ ك) = ٠,٥٥٨٨

∴ ٠,١٧٠٠ + ل (٠ ≤ صـ ≤ ك) = ٠,٥٥٨٨

∴ ل (٠ ≤ صـ ≤ ك) = ٠,٥٥٨٨ - ٠,١٧٠٠ = ٠,٣٨٨٨ ∴ ك = ١,٢٢

د **نلاحظ أن:**



المساحة $<$ ٠,٥ وأحد طرفى الفترة يقع فى الفترة الموجبة،
لذلك يكون الطرف الآخر للفترة ى يقع فى الفترة الموجبة أيضًا
كما هوموضح بالشكل الجانبى .

∵ ل (ك ⩽ صـ ⩽ ٢,١) = ٠,٢٩٠٦

∴ ل(٠ ⩽ صـ ⩽ ٢,١) - ل(٠ ⩽ صـ ⩽ ك) = ٠,٢٩٠٦

∴ ل(٠ ⩽ صـ ⩽ ك) = ل(٠ ⩽ صـ ⩽ ٢,١) − ٠,٢٩٠٦

= ٠,٤٨٢١ − ٠,٢٩٠٦ = ٠,١٩١٥   ∴ ك = ٠,٥

حاول أن تحل

٥ إذا كان صـ متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا فأوجد قيمة ك فى كل من الحالات الآتية :

أ ل (صـ ⩽ ك) = ٠,١٩٨٠   ب ل (صـ ⩾ ك) = ٠,١٩٨٠

جـ ل (- ٢,٤ ⩾ صـ ⩾ ك) = ٠,٧٩٧٠   د ل (ك ⩾ صـ ⩾ ٢,٥) = ٠,٨٢٣٨

مثال

٦ سـ متغير عشوائى طبيعى متوسطه μ ، انحرافه المعيارى σ

أ إذا كان: ل (سـ ⩽ ١٨٠) = ٠,٠٠٦٢ ، μ = ١٦٥ فاحسب σ

ب إذا كان: ل (سـ > ٣٥) = ٠,٨٦٤٣ ، σ = ٥ فاحسب μ

جـ إذا كان: ل (سـ ⩾ ١٧٠) = ٠,٠٢٢٨ ، σ = ٧ فاحسب μ

د إذا كان: ل (سـ ⩾ ك) = ٠,٨٩٤٤ ، μ = ١٢٥ ، σ = ٨ فاحسب ك

هـ إذا كان: ل (سـ > ك) = ٠,٩٤٥٢ ، μ = ٥٠ ، σ = ٥ فاحسب ك

الحل



أ ل(سـ ⩽ ١٨٠) = ل (صـ ⩽ $\frac{١٨٠ - ١٦٥}{\sigma}$) = ٠,٠٠٦٢

∴ ل (صـ ⩽ ى) = ٠,٠٠٦٢ حيث ى = $\frac{١٥}{\sigma}$ ، ى > ٠

∴ ل(٠ ⩽ صـ ⩽ ى) = ٠,٥ − ٠,٠٠٦٢ = ٠,٤٩٣٨

∴ ى = ٢,٥

∴ $\frac{١٥}{\sigma} = \frac{٥}{٢}$ ∴ $\sigma = \frac{١٥ \times ٢}{٥}$ ∴ σ = ٦

ب ل (س < ٣٥) = ل (ص < $\frac{٣٥ - \mu}{٥}$) = ٠,٨٦٤٣

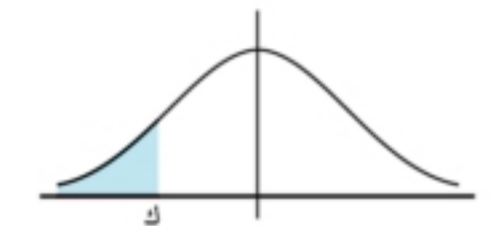
∴ ل (ص < ك) = ٠,٨٦٤٣ حيث

∴ ك = $\frac{٣٥ - \mu}{٥}$ ، ك < ٠ ∴ ل (٠ ≤ ص ≤ -ك) + ٠,٥ = ٠,٨٦٤٣

ل (-ك < ص ≤ ٠) = ٠,٨٦٤٣ - ٠,٥ = ٠,٣٦٤٣ ∴ ك = -١,١

∴ $\frac{٣٥ - \mu}{٥}$ = -١,١   ∴ ٣٥ - μ = -٥,٥

∴ μ = ٣٥ + ٥,٥   ∴ μ = ٤٠,٥



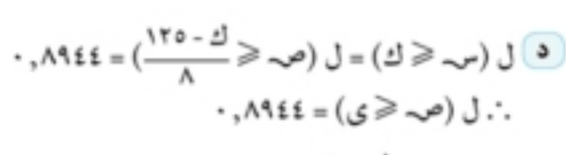
ج ل (س ≤ ١٧٠) = ل (ص ≤ $\frac{١٧٠ - \mu}{٧}$) = ٠,٠٢٢٨

∴ ل (ص ≤ ك) = ٠,٠٢٢٨ حيث ك = $\frac{١٧٠ - \mu}{٧}$ ، ك < ٠

∴ ل (ك ≤ ص ≤ ٠) = ٠,٥ - ٠,٠٢٢٨ = ٠,٤٧٧٢

∴ ك = -٢

∴ $\frac{١٧٠ - \mu}{٧}$ = -٢   ∴ ١٧٠ - μ = -١٤   ∴ μ = ١٧٠ + ١٤ μ = ١٨٤



د ل (س ≤ ك) = ل (ص ≤ $\frac{ك - ١٢٥}{٨}$) = ٠,٨٩٤٤

∴ ل (ص ≤ ى) = ٠,٨٩٤٤

حيث ى = $\frac{ك - ١٢٥}{٨}$ ، ى > ٠

∴ ل (٠ ≤ ص ≤ ى) = ٠,٨٩٤٤ - ٠,٥ = ٠,٣٩٤٤   ∴ ى = ١,٢٥

∴ $\frac{ك - ١٢٥}{٨}$ = ١,٢٥   ∴ ك - ١٢٥ = ١٠   ∴ ك = ١٢٥ + ١٠   ك = ١٣٥

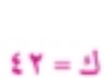
هـ ل (س > ك) = ل (ص > $\frac{ك - ٥٠}{٥}$) = ٠,٩٤٥٢

∴ ل (ص > ى) = ٠,٩٤٥٢

حيث ى = $\frac{ك - ٥٠}{٥}$ ، ى < ٠

∴ ل (٠ ≤ ص < -ى) = ٠,٩٤٥٢ - ٠,٥ = ٠,٤٤٥٢   ∴ ى = -١,٦

∴ $\frac{ك - ٥٠}{٥}$ = -١,٦   ∴ ك - ٥٠ = -٨   ∴ ك = ٥٠ - ٨   ك = ٤٢



حاول أن تحل

(٦) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ وكان ل (س < ١٩) = ٠,٧٧٣٤ ، ل (س > ١٠) = ٠,٩٣٣٢ احسب قيمة كل من μ ، σ .

تمـــارين (٤ - ١)

١ إذا كان ص متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا فأوجد :

أ ل (٠ ≤ ص ≤ ١,١٥) ، ل (٠ ≥ ص ≥ ٢,٤٢)

ب ل (-٠,٠٤ ≤ ص ≤ ٠) ، ل (-١,٦٣ ≤ ص ≤ ٠)

جـ ل (-٠,٧ ≤ ص ≤ ٠,٧) ، ل (-١,٦٥ ≤ ص ≤ ١,٦٥)

د ل (-٢,٤٢ ≤ ص ≤ ١,٦٧) ، ل (-١,٧٣ ≤ ص ≤ ٠,٦٤)

هـ ل (٠,٧٤ ≤ ص ≤ ١,٠٢) ، ل (١,٤ ≤ ص ≤ ٢,٢)

و ل (-٢,١ ≤ ص ≤ -٠,٩٢) ، ل (-١,٥ ≤ ص ≤ -٠,٨٤)

ز ل (ص ≤ ١,٤٤) ، ل (ص ≤ ٢,٠٥)

ح ل (ص ≤ -١,١٤) ، ل (ص ≤ -٢,٣٢)

ط ل (ص ≤ ٠,٦٥) ، ل (ص ≤ ١,٤٢)

ى ل (ص ≤ -٠,٤٥) ، ل (ص ≤ -١,٦)

٢ إذا كان ص متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا فأوجد قيمة العدد الحقيقى (ك) الذى يحقق :

أ ل (٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٣٥٥٤

ب ل (ك ≤ ص ≤ ٠) = ٠,٤١٢٠

جـ ل (- ك ≤ ص ≤ ك) = ٠,٢٢٠٦

د ل (ص ≤ ك) = ٠,٩٧٥٤

هـ ل (ص ≤ ك) = ٠,١٩٧٧

و ل (ص ≥ ك) = ٠,٠٩٣٤

ز ل (ص ≥ ك) = ٠,٩٩٥٥

ح ل (ك ≤ ص ≤ ١,١١) = ٠,٦٦٦٠

ط ل (ك ≤ ص ≤ ٢,٢٢) = ٠,٢٤٤٦

ى ل (-١,٧ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٣٢٦١

٣ ص متغير عشوائى طبيعى معيارى ، فإذا كان :

أ ل (ص ≤ ك)= ٠,١٧٣٦ أوجد: ل (ك ≤ ص ≤ ١,٧)

ب ل (ص ⩽ ك) = ٠,٠٢٠٧ أوجد: ل (٠,٥٦ ⩾ ص ⩾ ك)

ج ل (ص ⩾ ك) = ٠,٨٩٤٤ أوجد: ل (-٠,٧ ⩾ ص ⩾ ك)

د ل (٠,٤ ⩾ ص ⩾ ك) = ٠,٣١١٠ أوجد: ل (ص ⩾ ك)

هـ ل (١,٤ ⩾ ص ⩾ ك) = ٠,٠٧٧٠ أوجد: ل (-١,٤ ⩾ ص ⩾ ك)

و ل (ك ⩾ ص ⩾ ١,٧) = ٠,٨٥٨٦ أوجد: ل (ك ⩾ ص ⩾ ٠,٧٥)

٤ س متغير عشوائي طبيعي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ وكان

أ ل (س ⩾ ٩٠) = ٠,٠٦٦٨ ، μ = ١٠٢ فاحسب σ

ب ل (س ⩽ ٦٢) = ٠,٠٥٤٨ ، μ = ٥٠ فاحسب σ

ج ل (س ⩽ ٤٨) = ٠,٠٢٢٨ ، σ = ٤ فاحسب μ

د ل (س > ٦٨) = ٠,١٠٥٦ ، σ = ٦,٤ فاحسب μ

هـ ل (س ⩽ ٤٢) = ٠,٨٩٤٤ ، σ = ٦,٤ فاحسب μ

و ل (μ - ك σ ⩾ س ⩾ μ + ك σ) = ٠,٤٣٨ فاحسب ك

ز ل (س ⩾ ك) = ٠,٢١١٩ ، μ = ٤٢ ، σ = ٥ فاحسب ك

ح ل (س ⩾ ك) = ٠,٨٤١٣ ، μ = ٧٢ ، σ = ٨ فاحسب ك

ط ل (س > ك) = ٠,٩٧٧٢ ، μ = ٦٠ ، σ = ٤ فاحسب ك

٥ أجب عن الأسئلة الآتية

أ إذا كان س متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه ١٢٠ وانحرافه المعياري ١٠ وكان ل(س > ك) = ٠,٩٥٩٩ فأوجد قيمة ك .

ب إذا كان س متغيرًا طبيعيًا متوسطه μ وانحرافه المعياري σ = ٥ فأوجد قيمة μ التي تجعل ل (س ⩾ ٣٥) = ٠,٠٢٢٨

ج إذا كان س متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه μ = ٨ وانحرافه المعياري σ = ٢ ، وكان ل (س ⩽ ك) = ٠,١٠٥٦ فأوجد :

أولا : قيمة ك . ثانيًا : ل (س ⩾ ١٠)

د إذا كان س متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه μ و انحرافه المعياري σ فأوجد ل ($\mu - \frac{1}{4}\sigma$ ⩾ س ⩾ $\mu + \frac{1}{2}\sigma$)

ﻫ إذا كان صـ متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا فأوجد قيمة ك التى تحقق :

أولاً : ل (صـ > ك) = ٠,٠٢٨١

ثانياً : ل(- ١ < صـ < ك) = ٠,٧٩١٨

و إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه ١٨ و انحرافه المعيارى ٢,٥ فأوجد :

اولاً: ل(سـ < ١٥)

ثانياً: ل (١٧< سـ < ٢١)

ز إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه μ = ٢٤ وانحرافه المعيارى σ = ٥ فأوجد :

أولا : ل (سـ ≤ ٣٢,٥)

ثانيًا : ل (١٤ < سـ < ٢٩)

ح إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه μ = ٤٨ انحرافه المعيارى σ = ٥ فأوجد:

أولاً : ل (٤٣ < سـ < ٥٩)

ثانيًا : قيمة ك إذا كان ل (سـ > ك) = ٠,١٨٤١ .

ط إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه μ = ١٧ انحرافه المعيارى σ = ٢ فأوجد:

أولا : ل (١٦ ≤ سـ ≤ ٢٠)

ثانيًا : ل (سـ > ١٥)

ى إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه ٣٢ ، وتباينه ١٦ ، فأوجد :

أولا : ل (سـ < ٢٥)

ثانيًا : ل (٢٨ < سـ < ٣٥)

ك إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطهμ = ٨ انحرافه المعيارى σ = ٢ فأوجد:

أولا : ل (سـ ≤١٠)

ثانيًا : إذا كان ل (سـ ≤ ك) = ٠,١٠٥٦ ، فأوجد قيمة ك .

الوحدة الرابعة

٤ - ٢

بعض التطبيقات العملية للتوزيع الطبيعى

Some Practical Applications of the Normal Distribution

سوف تتعلم

- تطبيقات عملية التوزيع الطبيعى

المصطلحات الأساسية

- التوزيع الطبيعى Normal Distribution
- المنحنى الطبيعى Normal Curve
- المتغير العشوائى الطبيعى Normal Random Variable
- التوزيع الطبيعى المعيارى Standard normal distribution

مقدمة:

فى الدرس السابق تعرفنا على التوزيع الطبيعى وخواصه ، كما تعرفنا على المتغير العشوائى الطبيعى المعيارى وكيفية إيجاده من التوزيع الطبيعى بمعلومية المتوسط والانحراف المعيارى ، كما تعرفنا على كيفية حساب احتمالات متغير عشوائى له توزيع طبيعى معيارى باستخدام الجداول الإحصائية. وفى هذا الدرس سوف نتناول بعض الاستخدامات المختلفة للمتغير العشوائى الطبيعى فى دراسة بعض الظواهر التى يعبر عنها .

مثال **الربط بالصناعة**



(١) ماكينة بأحد المصانع تنتج أسطوانات أطوالها تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٥٦ سم وانحرافه المعيارى ٢سم، تكون الأسطوانة المنتجة مقبولة إذا كان طولها ينحصر بين ٥١ سم ٦٠ سم، اختيرت عينة عشوائية من ١٠٠٠ أسطوانة، فكم عدد الأسطوانات المتوقع قبولها؟



الحل

باعتبار أن س متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا يعبر عن طول الأسطوانة

$\therefore$ احتمال (الأسطوانة مقبولة) = ل (٥١ > س > ٦٠)

$= ل\left(\frac{٥١ - ٥٦}{٢} > ص > \frac{٦٠ - ٥٦}{٢}\right)$

= ل (-٢,٥ > ص > ٢)

= ل (-٢,٥ > ص ≥ ٠) + ل (٠ ≥ ص > ٢)

= ٠,٤٩٣٨ + ٠,٤٧٧٢ = ٠,٩٧١٠

$\therefore$ عدد الأسطوانات المتوقع قبولها = ١٠٠٠ × ٠,٩٧١٠ = ٩٧١ أسطوانة

حاول أن تحل

(١) الربط بالدخل: إذا كان الدخل الشهرى لمجموعة مكونة من ٢٠٠ عامل فى أحد المصانع يتبع التوزيع الطبيعى متوسط ١٧٥ جنيهًا وانحرافه المعيارى ١٠ جنيهات، فما هو عدد العاملين الذين يتراوح دخلهم بين ١٧٠ جنيهًا، ١٨٠ جنيهًا.

الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية

مثال



(٢) **الربط بالتعليم:** إذا كانت درجات الطلاب فى إحدى المدارس هى متغير عشوائى طبيعى متوسطه μ = ٤٤ وانحرافه المعيارى σ ، حيث حصل ٢٢,٦٦٪ من الطلاب على أكثر من ٥٠ درجة ، أوجد قيمة σ .

الحل

نفرض أن سـ متغير عشوائى طبيعى يعبر عن درجات الطلاب .



$\therefore$ ل (سـ > ٥٠) = $\frac{٢٢,٢٦}{١٠٠}$

$\therefore$ ل (صـ > $\frac{٥٠ - ٤٤}{\sigma}$) = ٠,٢٢٦٦

$\therefore$ ل (صـ > ك) = ٠,٢٢٦٦ حيث ك = $\frac{٦}{\sigma}$ ، ك > ٠

$\therefore$ ل (٠ $\leqslant$ صـ < ك) = ٠,٥ - ٠,٢٢٦٦ = ٠,٢٧٣٤

$\therefore$ ك = ٠,٧٥ $\qquad \therefore \frac{٦}{\sigma}$ = ٠,٧٥ $\qquad \therefore \sigma = \frac{٦}{٠,٧٥}$ = ٨

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت درجات الطلاب فى أحد الامتحانات تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٦٠ وانحرافه المعيارى ١٢ ، واختير طالب عشوائيًّا ، أوجد احتمال أن تكون درجة الطالب واقعة بين ٦٦، ٧٥ درجة و إذا كان ١٥٪ من الطلاب الأوائل بالترتيب حصلوا على تقدير ممتاز ، فأوجد أقل درجة للطالب الحاصل على تقدير ممتاز.

مثال

(٣) **الربط بالطول:** إذا كان أطوال الطلاب فى إحدى المدارس الثانوية يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه μ = ١٦٠ سم، وانحرافه المعيارى σ = ٥ سم فأوجد احتمال أن يختلف طول أى طالب عن μ بما لا يزيد عن ٨ سم .

الحل

نفرض أن سـ متغير عشوائى طبيعى يعبر عن أطوال الطلاب اختلاف الطول عن μ = | سـ - μ | " أى الفرق المطلق بين الطول والمتوسط μ"



التعبير : |س - أ| < ب يكافئ:

التعبير : - ب < س - أ < ب

اى ان: أ - ب < س < أ + ب

$\therefore$ ل (| سـ - μ| < ٨) = ل(|سـ - ١٦٠| < ٨)

$\therefore$ ل(-٨ < سـ - ١٦٠ < ٨)

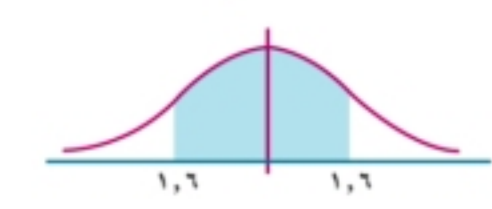
= ل (١٥٢ < سـ < ١٦٨)

= ل ($\frac{١٥٢ - ١٦٠}{٥}$ < صـ < $\frac{١٦٨ - ١٦٠}{٥}$)

= ل (-١,٦ < صـ < ١,٦)

= ٢ × ل (٠ $\leqslant$ صـ < ١,٦)

= ٢ × ٠,٤٤٥٢ = ٠,٨٩٠٤



؟ حاول أن تحل

٣ **الربط بالوزن:** إذا كان توزيع أوزان التلاميذ فى إحدى المدارس الابتدائية يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٣٠ كجم وانحراف معيارى ٥ كجم، احسب النسبة المئوية لعدد التلاميذ الذين يزيد أوزانهم عن ٤٥ كجم، وكذلك النسبة المئوية لعدد التلاميذ الذين يقع أوزانهم بين ٢٥، ٣٥ كجم.



مثال

٤ **الربط بالعمل:** إذا كان توزيع أجور عمال أحد المصانع هو توزيع طبيعى متوسطه μ = ٧٥ جنيهًا وانحراف معيارى σ = ١٠ فأوجد:

أ النسبة المئوية لعدد العمال الذين تزيد أجورهم عن ٩٠ جنيهًا.

ب النسبة المئوية لعدد العمال الذين تقل أجورهم عن ٥٥ جنيهًا.

جـ النسبة المئوية لعدد العمال الذين تتراوح أجورهم بين ٦٠ ، ٨٠ جنيهًا.

الحل

أ ∵ ل (س > ٩٠) = ل (ص > $\frac{٩٠ - ٧٥}{١٠}$)

= ٠,٥ - ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٥) = ٠,٥ - ٠,٤٣٣٢ = ٠,٠٦٦٨

∴ نسبة عدد العمال الذين تزيد أجورهم عن ٩٠ جنيهًا = ٦,٦٨ ٪

ب ∵ ل (س < ٥٥) = ل (ص < $\frac{٥٥ - ٧٥}{١٠}$) = ل (ص < -٢)

= ٠,٥ - ل (٠ ≤ ص ≤ ٢) = ٠,٥ - ٠,٤٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

∴ نسبة عدد العمال الذين تقل أجورهم عن ٥٥ جنيهًا = ٢,٢٨ ٪ من العدد الكلى

جـ ∵ ل (٦٠ ≤ ص ≤ ٨٠) = ل ($\frac{٦٠ - ٧٥}{١٠}$ ≤ ص ≤ $\frac{٨٠ - ٧٥}{١٠}$)

= ل (-١,٥ ≤ ص ≤ ٠,٥) = ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٥) +

ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٥) = ٠,١٩١٥ + ٠,٤٣٣٢ = ٠,٦٢٤٧

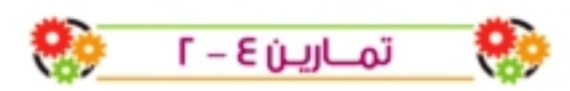
∴ نسبة عدد العمال الذين تتراوح أجورهم بين ٦٠ ، ٨٠ جنيهًا = ٦٢,٤٧ ٪ من العدد الكلى لعمال المصنع .

؟ حاول أن تحل

٤ بفرض أن درجات أحد الامتحانات هى متغير طبيعى بتوقع ٧٦ وانحراف معيارى ١٥ درجة وبترتيب الطلاب الأوائل الحاصلين على درجة أعلى من الدرجة α فكانوا يمثلون ١٥ ٪ من إجمالى الطلاب ، وبترتيب الطلاب الحاصلين على أقل الدرجات أدنى من الدرجة β وجد أنهم يمثلون ١٠ ٪ من إجمالى الطلاب أوجد :

أ أقل درجة α كى يعتبر الطالب من الأوائل .

ب درجة الرسوب β .





(١) إذا كان الدخل الشهرى لعدد ١٠٠٠ أسرة فى إحدى المدن هو متغير عشوائى طبيعى متوسطه ١٧٠ جنيهًا وانحرافه المعيارى ٢٠ جنيهًا اختيرت أسرة عشوائيًا ،أوجد:

أ احتمال أن يكون دخلها ينحصر بين ١٦٠ جنيهًا، ٢٠٠ جنيهًا .

ب عدد الأسر التى يزيد دخلها عن ١٥٠ جنيهًا .

(٢) إذا كان أوزان الطلاب فى إحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًا متوسطه ٦٨,٥ كيلو جرامًا وانحرافه المعيارى ٢,٥ كيلو جرامًا .

أ احسب النسبة المئوية للطلاب الذين تقع أوزانهم بين ٦٧,٥ كيلو جرامًا ، ٧١ كيلو جرامًا .

ب إذا كان عدد الطلاب ١٠٠٠ طالب فاحسب عدد الطلبة الذين تزيد أوزانهم عن ٧١ كيلو جرامًا .



(٣) أخذت عينة عشوائية من ٢٠٠ تلميذ من مدرسة . فإذا كانت أعمارهم متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه ١٦,٦ وانحرافه المعيارى ١,٢ ، أوجد عدد التلاميذ الذين تقل أعمارهم عن ١٦ سنة من تلك العينة .

(٤) إذا كانت أطوال ٢٠٠٠ طالب بإحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط ١٧٠ سم وانحراف معيارى ٨ سم فأوجد عدد الطلاب الذين تقل أطوالهم عن ١٧٦ سم .

(٥) إذا كان الدخل الشهرى لـ ٣٠٠ أسرة يمثل متغيرًا عشوائيًا س يتبع التوزيع الطبيعى بتوقع μ = ٥٠٠ جنيه وانحراف معيارى σ = ٢٠ جنيهًا فأوجد

أ عدد الأسر التى تحصل على دخل شهرى أكبر من ٥٣٠ جنيهًا .

ب الحد الأعلى للدخل لنسبة الـ ٤ ٪ من الأسر التى تحصل على أدنى الدخول .

(٦) إذا كان الدخل الشهرى لـ ٢٠٠ أسرة متغيرًا عشوائيًا س يتبع توزيعًا طبيعيًا بتوقع μ = ٤٠٠ وانحراف معيارى σ = ٨٠ جنيهًا . واختيرت أسرة عشوائيًا من هذه الأسر ، فأوجد :

أ احتمال أن يكون الدخل الشهرى للأسرة أكبر من ٥٠٠ جنيه على الأكثر

ب عدد الأسر التى تحصل على دخل شهرى ٥٠٠ جنيه على الأكثر .

(٧) إذا كان عمر التشغيل (بالساعات) لنوع من البطاريات متغيرًا عشوائيًا يتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط ٢٠٠٠ ساعة وانحراف معيارى ١٢٠ ساعة ، فما احتمال أن تستمر البطارية فى التشغيل لأكثر من ١٨٠٠ ساعة.



(٨) إذا كان الدخل الشهرى لمجموعة مكونة من ٥٠٠ عامل يتبع توزيعًا طبيعيًا متوسطه ١٨٠ جنيهًا وانحرافه المعيارى ١٥ جنيهًا فأوجد عدد العمال الذين يقل دخلهم عن ١٩٨ جنيهًا.

(٩) إذا كان ارتفاع مياه الأمطار خلال شهر فبراير يتبع توزيعًا طبيعيًا متوسطه μ = ٣ سم ، وتباينه σ^2 = ٤ سم^2 ، فأوجد احتمال أن يكون ارتفاع الأمطار فى شهر فبراير فى العام التالى :

أ أكبر من ١ سم
ب بين ٣,٥ سم ، ٤ سم

(١٠) إذا كانت درجات الحرارة فى شهر أغسطس تتبع توزيعًا طبيعيًا متوسطه μ = ٣٥ درجة ، وانحرافه المعيارى σ = ٥ درجات ، فأوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة فى يوم ما خلال هذا الشهر:

أ واقعة بين ٢٨ درجة ، ٣٨ درجة.
ب أكبر من ٣٩ درجة .
جـ واقعة بين ٢٦ درجة ، ٣٢ درجة.

(١١) تقدم ١٠٠٠ شاب إلى إدارة التجنيد، فإذا كانت أطوالهم تتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط ١٧٠ سم، وانحراف معيارى ١٠ سم، أوجد عدد الشباب :

أ الذين تقل أطوالهم عن ١٩٠ سم
ب غير المقبولين إذا كان الحد الأدنى للطول المطلوب هو ١٥٥ سم

(١٢) وجد أن أطوال نوع معين من النبات تكون موزعة حسب التوزيع الطبيعى بمتوسط ٥٠ سم، وانحراف معيارى σ ، إذا علم أن أطوال ١٠,٥٦٪ من هذا النبات أقل من ٤٥ سم، فأوجد التباين لأطوال هذا النبات

(١٣) إذا كانت أوزان الطلبة فى إحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًا متوسطه ٦٥ كيلوجراما، وانحرافه المعيارى σ، وكانت أوزان ٣٣٪ من الطلبة تزيد عن ٧٠ كيلو جرامًا.

أ أوجد قيمة σ
ب إذا كان عدد الطلبة ١٠٠٠ طالب فاحسب عدد الطلبة الذين تقل أوزانهم عن ٦٧,٥ كيلوجرام

(١٤) إذا كان أوزان الطلبة فى إحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًا متوسطه ٦٨,٥ كيلو جرام وانحرافه المعيارى ٢,٥ كيلو جرام :

أ احسب النسبة المئوية للطلاب تقع أوزانهم بين ٦٧,٥ كيلو جرام ، ٧١ كيلو جرام .
ب إذا كان عدد الطلاب ١٠٠٠ طالب فاحسب عدد الطلاب الذين تزيد أوزانهم عن ٧١ كيلوجرامًا.

(١٥) إذا كان درجات الطلاب فى إحدى المدارس هى متغير عشوائى طبيعى بمتوسط μ = ٤٢ وانحرافه المعيارى σ حيث حصل ٢٦,١١ ٪ من الطلاب على أكثر ٥٠ درجة فأوجد قيمة σ .

(١٦) فى امتحان مادة الرياضيات كانت درجات الطلبة موزعة توزيعًا طبيعيًا بمتوسط قدره ٧٠ وانحراف معيارى ٥ ، أوجد عدد الطلبة الذين تزيد درجاتهم عن ٧٨ إذا علم أن عدد الطلبة المتقدمين للامتحان ١٠٠ طالب .

(١٧) ينتج أحد المصانع أسطوانات أطوالها يتبع توزيعًا طبيعيًا متوسطه ٥٦ سنتيمترًا وانحرافه المعيارى ٢ سنتيمترا، وتكون الأسطوانات المنتجة مقبولة إذا كان طولها ينحصر بين ٥١ ، ٦٠ سنتيمترا ،أخذت عينة عشوائية من ١٠٠٠ أسطوانة . كم عدد الأسطوانات المتوقع قبولها؟

(١٨) إذا كانت أنصاف أقطار الحلزونات التى تنتجها أحد المصانع موزعة توزيعًا طبيعيًا بمتوسط ٢٥ سم ، وانحراف معيارى ٢٠ سم ، يعتبر الحلزون معيبًا إذا كان نصف قطره يقل عن ٢٠ سم أو يكبر عن ٢٨ سم اختير حلزون عشوائيًا . أوجد احتمال أن يكون الحلزون معيبًا .

(١٩) إذا كانت أوزان مجموعة من حيوانات التجارب تتبع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط μ جرام وانحراف معيارى ١٠ جرامات فإذا علمت أن : ل (س $\leqslant$ ١٨٠) = ٠,١٥٨٧ احسب المتوسط μ .

(٢٠) إذا كانت درجات الطلاب فى امتحان ما متغيرًا عشوائيًا يتبع توزيعًا طبيعيًا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ فأوجد :

أ احتمال الذين يحصلون على درجة أكبر من (μ - σ) .

ب النسبة المئوية للطلاب الذين يحصلون على درجة محصورة بين : (μ - ٢σ) ، (μ + ٢σ) .

(٢١) وجد أن أطوال نوع معين من النبات تكون موزعة حسب التوزيع الطبيعى بمتوسط μ وانحراف معيارى ٤. إذا علم أن أطوال ١٠,٥٦ ٪ من هذا النبات أقل من ٤٥ سم ، فأوجد المتوسط μ لهذا النبات .

(٢٢) إذا كانت درجات الحرارة فى شهر يناير تتبع توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابى ١٦ درجة وانحرافه المعيارى ٤ درجات فأوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة فى يوم ما خلال هذا الشهر :

أ واقعة بين ١٤ درجة ، ٢٠ درجة

ب أكبر من ١٥ درجة .

(٢٣) فى أحد المجتمعات وجد أن نسب الذكاء تتوزع توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابى ١٠٤,٦ وانحرافه المعيارى ٦,٢٥

أ أوجد نسبةالأفراد الذين تقع نسب ذكائهم بين ٩٠، ١٢٠

ب أوجد نسبة الأفراد الذين تزيد نسب ذكائهم عن ١١٠ .

ملخص الوحدة

المتغير العشوائى الطبيعى

المتغير العشوائى الطبيعى المتصل س مداه يتحدد بالفترة]-∞ ، ∞[ودالة الكثافة الاحتمالية له تمثل بمنحنى يتخذ دائمًا شكل الجرس و يتحدد شكله بمعرفة قيمتين هما المتوسط μ والانحراف المعيارى σ.

خواص المنحنى الطبيعى

١ له قمة واحدة وطرفاه يمتدان إلى- ∞ ، ∞ .

٢ له محور تماثل يمر بالقمة و يقطع المحور الأفقى عند س = μ .

٣ مساحة المنطقة الواقعة أسفل المنحنى الطبيعى وفوق المحور الأفقى تساوى الواحد الصحيح .

٤ من التماثل نجد أن المستقيم س = μ يقسم المساحة الواقعة تحت المنحنى وفوق المحور الأفقى إلى منطقتين مساحة كل منهما = ٠,٥ .

٥ يمكن حساب المساحة التقريبية للمنطقة أسفل المنحنى وأعلى المحور الأفقى تبعًا للفترات الآتية :

- من $\mu - \sigma$ إلى $\mu + \sigma$ = ٦٨,٢٦ ٪ من المساحة الكلية .
- من $\mu - ٢\sigma$ إلى $\mu + ٢\sigma$ = ٩٥,٤٤ ٪ من المساحة الكلية .
- من $\mu - ٣\sigma$ إلى $\mu + ٣\sigma$ = ٩٩,٧٤ ٪ من المساحة الكلية .

التوزيع الطبيعى المعيارى

إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س هو التوزيع الطبيعى بمتوسط μ وانحراف معيارى σ فإن:
ص = $\frac{س - \mu}{\sigma}$ هو توزيع طبيعى معيارى توقعه صفر وانحرافه المعيارى = ١ .

خواص دالة الكثافة للتوزيع الطبيعى المعيارى :

١ المنحنى يقع أعلى المحور الأفقى.

٢ متماثل بالنسبة للمحور الرأسى.

٣ طرفا المنحنى يمتدان إلى ما لا نهاية دون أن يلتقيا بالمحور الأفقى .

٤ مساحة المنطقة أسفل المنحنى وفوق المحور الأفقى = ١

٥ من التماثل نجد أن المحور الرأسى يقسم المساحة الواقعة تحت المنحنى وفوق المحور الأفقى إلى منطقتين مساحة كل منهما = ٠,٥.

٦ يمكن حساب المساحة التقريبية للمنطقة أسفل المنحنى المعيارى فقط وفوق أى فترة [أ ، ب] بواسطة جداول خاصة .

جدول المساحة أسفل منحنى التوزيع الطبيعى المعيارى :

لتحويل التوزيع الطبيعى س إلى توزيع طبيعى معيارى ص نستخدم العلاقة :

ص = $\frac{س - \mu}{\sigma}$ ومن جدول التوزيع الطبيعى المعيارى المرفق فى نهاية الكتاب يمكن إيجاد المساحة المطلوبة .

تمارين عامة

(١) أثبت أنه لأى توزيع طبيعى لمتغير عشوائى س متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ يكون ل (س ≤ μ+٢σ) = ٠,٠٢٢٨

(٢) إذا كان س متغيرًا طبيعيًّا متوسطه μ وتباينه ٦٤ فأوجد قيمة μ إذا كان ل (س < ٧٠) = ٠,١٧

(٣) أوجد σ إذا علم أن ل (س < ٣٧,٢٥) = ٠,٠٤٤٦ وكانت μ = ٥٠

(٤) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ = ١٦ وانحرافه المعيارى σ = ٤ احسب قيمة كل من:

أ ل (س ≥ ١٩)   ب ل (٩ ≥ س ≥ ٢٠)   ج ل (س ≤ ١٠)

(٥) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ وكان ل (س < ١٩) = ٠,٧٧٣٤ ، ل (س < ١٠) = ٠,٩٣٣٢ فأوجد قيمة كل من μ ، σ.

(٦) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ فأوجد قيمة كل من:

أ ل(μ - ٢σ ≥ س ≥ μ + ٢σ)

ب ل(μ - ١,٣٥σ ≥ س ≥ μ - ٠,٧σ) احسب قيمة كل من μ، σ

(٧) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ وكان:

أ ل (س < ٤٥) = ٠,٠٢٢٨ ، σ = ١٠   أوجد μ

ب ل (س ≤ ١٥) = ٠,٨٤١٣ ، σ = ٥   أوجد μ

ج ل (س > ٥٥) = ٠,٣٠٨٥ ، μ = ٦٠   أوجد σ

(٨) إذا كان س متغيرًا طبيعيًّا متوسطه ٥٠ وانحرافه المعيارى ١٠ فأوجد:

أ ل (س < ٧٠)   ب قيمة ك إذا كان ل (س < ك) = ٠,١٥٨٧

(٩) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا له توزيع طبيعى متوسطه ١٠٠ وانحرافه المعيارى ٤

أ إذا كان ل (س < أ) = ٠,٥٦٣٦ فأوجد قيمة أ

ب أوجد ل (س > ٩٠)

ج أوجد ل (س < ١٠٨)

د أوجد ل (٩٥ > س > ١٠٥)

(١٠) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ = ٨ وكان ل (س ≥ ٤٠) = ٠,١٥٨٧ فأوجد:

أ قيمة المتوسط   ب ل (س < ٥٠)

(١١) إذا كان ص متغيرًا عشوائيًّا معياريًّا وكان:

أ ل (ص < ك) = ٠,١٠٥٦   فأوجد قيمة ك

ب ل -٠,٤٤ ≥ ص ≥ ك) = ٠,٥٥٨٨   فأوجد قيمة ك

١٢ إذا كان س متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ أوجد :

أ ل (س < μ)　　ب ل (س > μ)

جـ ل (μ - σ ≤ س ≤ μ + σ)　　د ل (س < μ + ٢ σ)

هـ ل (μ - σ ≤ س ≤ μ + ٢ σ)　　و ل (μ - ٠,٥ σ ≤ س ≤ μ + ٠,٥ σ)

١٣ إذا كان س متغيرًا طبيعيًا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ وكان ا > ٠ فأوجد ا بحيث:

أ ل (μ - ا σ ≤ س ≤ μ + ا σ) = ٠,٦٤٧٦

ب ل (μ - ا σ ≤ س ≤ μ + ا σ) = ٢ ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٤٨)

١٤ إذا كان س متغيرًا طبيعيًا متوسطه ٧٥ وانحرافه المعيارى ١٥ فأوجد قيمة ك إذا كان ل (س > ك) = ٠,١٥

١٥ إذا كان س متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه μ وانحرافه المعيارى ٥ فأوجد قيمة μ التى تجعل ل (س ≤ ٤٥) تساوى :

أ ٠,٠٢٢٨　　ب ٠,٩٣٣٢

١٦ الربط بالطقس: إذا كانت درجات الحرارة خلال أحد الشهور تتبع توزيعًا طبيعيًا متوسطه ٢٠° وانحرافه المعيارى $\frac{1}{2}$ ٣° فأوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة بين ٢١°، ٢٥°

١٧ الربط بالدخل: إذا كان الدخل اليومى لمجموعة مكونة من ١٠٠٠ عامل تتبع توزيعًا طبيعيًا متوسطه ٤٠٠ جنيهًا وانحراف ٨٠ جنيهًا اختير أحد العمال عشوائيًا فأوجد :

أ احتمال أن يكون دخل العامل يقل عن ٢٤٠ جنيهًا.

ب النسبة المئوية للعمال الذين يزيد دخلهم عن ٣٠٠ جنيه .

جـ عدد العمال المحصور دخلهم بين ٢٦٠ ، ٣٤٠ جنيهًا.

١٨ الربط بالأجور: إذا كانت أجور مجموعة مكونة من ٥٠٠ عامل تتبع توزيعًا طبيعيًا متوسطه ٦٠ وانحرافه المعيارى ١٢ فأوجد عدد العمال :

أ الذين أجورهم لا تزيد عن ٥٤ .　　ب الذين لا تقل أجورهم عن ٨١ .

١٩ درجات الامتحان: إذا كانت درجات الطلاب فى امتحان ما متغيرًا عشوائيًا يتبع توزيعًا طبيعيًا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ فأوجد :

أ احتمال الذين يحصلون على درجة أكبر من (μ - σ)

ب النسبة المئوية للطلاب الذين يحصلون على درجة محصورة بين : (μ - ٢ σ) ، (μ + ٢ σ) .



اختبار تراكمي

(١) صندوق به ١٥ كرة منها ٥ كرات حمراء مرقمة من ١ إلى ٥ ، ١٠ كرات سوداء مرقمة من ٦ إلى ١٥ سحبت كرة واحدة عشوائيًا من هذا الصندوق .

أولًا: احسب احتمال كل من الحدثين التاليين :

(أ) حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو تحمل رقمًا فرديًا.

(ب) حدث أن تكون الكرة المسحوبة سوداء وتحمل رقمًا زوجيًا.

ثانيًا: هل أ ، ب حدثان متنافيان ؟ فسر إجابتك .

(٢) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا له دالة كثافة الاحتمال د(س) حيث :

$$د(س) = \begin{cases} ك\ (٢س - ١) & \text{عندما } ١ \leqslant س \leqslant ٣ \\ صفر & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد :

(أ) قيمة الثابت ك (ب) ل (سـ $\leqslant$ ٢)

(٣) فى دراسة للعلاقة بين حجم الدخل الشهرى (س) و حجم الادخار الشهرى (ص) بالجنيه المصرى لعينة مكونة من ٢٠ أسرة ، كانت لدينا البيانات التالية :

مجـ س = ٣٠٠٠   مجـ ص = ٣٠٠   مجـ $س^٢$ = ٨٠٠٠٠٠

مجـ $ص^٢$ = ٥٥٠٠   مجـ س ص = ٦٠٠٠٠

(أ) احسب معامل الارتباط الخطى بين حجم الدخل الشهرى والادخار للأسرة .

(ب) أوجد معادلة خط الانحدار .

(جـ) قدر المبلغ الذى تدخره شهريًا أسرة دخلها الشهرى ٢٠٠٠ جنيه .

(٤) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا وكانت لديك الدالة :

$$د(س) = \frac{س^٢ + ك}{١٨} \quad \text{حيث } س = -١ ، \text{صفر} ، ٢ ، ٣$$

(أ) أوجد قيمة ك التى تجعل د(س) دالة توزيع احتمالى للمتغير سـ .

(ب) احسب المتوسط للمتغير سـ . (جـ) أوجد ل (سـ $\geqslant$ ٢) .

(٥) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية ما وكان :

ل(أ) = $\frac{١}{٣}$ ، ل(ب) = س ، ل$(أ \cup ب)'$ = $\frac{١}{٣}$

أولًا: أوجد قيمة س فى كل من الحالتين الآتيتين :

(أ) أ ، ب حدثان متنافيان . (ب) أ $\supset$ ب

ثانيًا: إذا كانت س = $\frac{١}{٤}$ فأوجد ل$(أ \cap ب)$.

٦) **الربط بالطول:** إذا كانت أطوال مجموعة من الطلاب تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى ٨ سم فأوجد قيمة μ إذا كان الطول المعيارى لطالب طوله ١٨٠ سم هو ١,٢٥ .

٧) **الربط بالإنتاج:** إذا كان س ، ص متغيرين يمثلان حجم الإنتاج (س) و أجور العاملين (ص) بالألف جنيه مصريًّا لإحدى الشركات ، و كان لدينا البيانات التالية عن ٦ سنوات مختلفة .

حجم الإنتاج	١٠٠٠	٢٠٠٠	٢٥٠٠	٤٠٠٠	٢٣٠٠	٢٥٠٠
الأجور	١٥٠	٢٠٠	١٥٠	٧٠٠	١٨٠	٢٠٠

احسب قيمة معامل ارتباط الرتب بين حجم الإنتاج و الأجور ثم بين نوعه .

٨) **الربط بالحافز:** إذا كان توزيع حوافز عمال أحد المصانع هو توزيع طبيعى متوسطه μ = ٧٥ جنيهًا وانحراف معيارى σ = ١٠ . أوجد النسبة المئوية لعدد العمال الذين:

أ) تزيد حوافزهم عن ٩٠ جنيهًا .

ب) تقل حوافزهم عن ٥٥ جنيهًا .

جـ) تتراوح حوافزهم بين ٦٠ ، ٨٠ جنيهًا .

٩) **الربط بالطقس:** إذا كانت درجات الحرارة فى شهر يناير تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ١٦ درجة وانحرافه المعيارى ٤ درجات فأوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة فى يوم ما خلال هذا الشهر : .

أ) واقعة بين ١٤ درجة ، ٢٠ درجة   ب) أكبر من ١٥ درجة .

١٠) **ترشيد الطاقة:** فى مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية الموفرة ، لوحظ أن عمر المصابيح المنتجة (بالأيام) يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى ٢٠ يومًا وأن ٤,٩٥ ٪ من المصابيح المنتجة يقل عمرها عن ١٠٠ يوم .

أ) أوجد قيمة μ

ب) من ضمن ١٠٠٠٠ مصباح من المصابيح المنتجة ، قدر عدد المصابيح التى يتراوح عمرها بين ١٠٠ ، ١٥٠ يومًا.

الاختبار الأول

يسمح باستخدام الآلة الحاسبة وجدول المساحات

السؤال الأول:

(أ) أكمل العبارات الآتية:

١ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية حيث ل(ب َ) = ٠,٦ فإن قيمة ل(أَ ∩ ب) + ل (أ) × ل (ب | أ) = ...

٢ إذا كانت صـ متغيرًا طبيعيًا معياريًا بحيث ل (ك ≥ صـ ≥ ١,٥) = ٠,٠٣ فإن قيمة ك = ...

٣ إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية حيث ل(أ) = ٠,٣ ل (ب) = ٠,٨ فإن ل (أ - ب) = ...

٤ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متقطعًا وكان التوقع يساوى ٥ ، $\sum$ سـ$_{ر}^{٢}$ د(سـ$_{ر}$) = ٣٤ فإن الانحراف المعيارى يساوى ....

٥ إذا كانت معادلة انحدار ص على س هى ص = ٠,٢ س + ٣ وكانت قيمة ص الجدولية عندما س = ٥ هى ٤,٦ فإن مقدار الخطأ فى قيمة ص تساوى ....

(ب)

ا ، ب حدثان حيث ل (ا) = ٠,٦ ، ل (أَ ∩ ب) = ٠,٢ ، ل (ا ∩ ب) = ٠,٣ فاحسب:

أ ل (ب | ا) ب ل (أَ | ب َ)

السؤال الثانى:

(أ) الجدول الآتى يبين تقديرات ٦ طلاب فى مادتى الرياضيات (س) والإحصاء (ص) احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س ، ص وحدد نوعه.

س	ممتاز	مقبول	جيد	مقبول	جيد جدًا	جيد جدًا
ص	جيد جدًا	مقبول	مقبول	جيد	جيد	ممتاز

(ب) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطة μ = ١٠ وانحرافه المعيارى σ = ٢,٥

١ أوجد ل (سـ ≥ ١٢,٥)

٢ إذا كان ل (سـ ≥ ك) = ٠,١٠٥٦ فأوجد قيمة ك.

السؤال الثالث:

(أ) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلاً وكانت :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س - ١}{٨} & \text{حيث } ١ \leq س \leq ٥ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

(١) أثبت أن د(س) هى دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى سـ .

(٢) احسب ل (٢ < س < ٣)

(ب) إذا كان الدخل الشهرى لعدد ١٠٠٠ أسرة في إحدى المدن هو متغير عشوائى طبيعى متوسطه ١٧٠٠ جنيه وانحرافه المعيارى ٢٠٠ جنيه واختيرت أسرة عشوائيًا من هذه الأسر فأوجد عدد الأسر التى يزيد دخلها عن ١٥٠٠ جنيه.

السؤال الرابع :

(أ) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متقطعًا مداه {-٢، -١ ، صفر ، ١، ٢} وكان ل (سـ = ر) = $\frac{أ + ر}{١٥}$ لكل ر تنتمى إلى مدى س فأوجد قيمة أ ثم أوجد الانحراف المعيارى للمتغير سـ.

(ب) إذا كان : مجـ س = ٤٩ ، مجـ ص = ٤٥ ، مجـ س^٢ = ٣٥٩ ، مجـ ص^٢ = ٣٠٣، مجـ س ص = ٣٢٠ ، ن = ٧

(١) احسب معامل الارتباط لبيرسون بين قيم س ، ص وعين نوعه.

(٢) قدر قيمة ص عندما س = ٩ باستخدام خط الانحدار .

الاختبار الثانى

يسمح باستخدام الآلة الحاسبة وجدول المساحات

السؤال الأول

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا أُلقي حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور العدد ٥ علمًا بأن العدد الظاهر فردى يساوى :

أ $\frac{١}{٤}$ ب $\frac{١}{٣}$ جـ $\frac{١}{٢}$ د $\frac{٣}{٤}$

(٢) إذا كان أ ، ب حدثين وكان ل(أ ∩ ب) = ٠,٢ ، ل (ب) = ٠,٤ فإن ل (أ | ب) يساوى

أ ٠,٥ ب ٠,٠٦ جـ ٠,١٤ د ٠,١

(٣) قيمة ك فى التوزيع الاحتمالى التالى هى:

سـ	ك^٢	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$
د(س)ر	٣	٥	٨

أ $\frac{١}{٤}$ ب $\frac{١}{٢}$ جـ $\frac{٣}{٤}$ د ١

(٤) إذا كانت درجات فصل فى امتحان الإحصاء تتبع توزيعًا طبيعيًا متوسطه ٧٦ وانحرافه المعيارى ٥ ، وحصل أحمد فى هذا الامتحان على ٦٦ درجة فإن درجة أحمد فى صورة معيارية هى :

أ ٣ ب -٢ جـ ١ د ٢

٥ المعامل الذى يمثل أقوى علاقة بين متغيرين هو:

أ -٠,٥٨ ب ٠,٤٨ ج ٠,٦٨ د -٠,٧٨

(ب) صندوق يحوى ٩ كرات متماثلة فى الحجم والملمس ومرقمة بالأرقام ٠، ١، ٢، ... ٨ سحبت عشوائيًا منه كرتان الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع ، احسب احتمال أن :

١ الكرة الأولى تحمل رقمًا زوجيًا والثانية تحمل رقمًا زوجيًا (الحصول على رقمين زوجيين).

٢ الكرة الأولى تحمل رقمًا فرديًا والثانية تحمل رقمًا زوجيًا.

السؤال الثانى:

(أ) من بيانات الجدول الآتى :

س	١٥٠	١٨٠	١٥٠	١٢٠	١٢٠	١٠٠
ص	١٢٠	١٢٠	١٠٠	٨٠	٨٠	١٠٠

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س ، ص.

(ب) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متقطعًا وتوزيعه الاحتمالى كالآتى :

سـ	١	٢	٤	٦
د(سـ)	٠,٢	أ	٠,٤	٠,١

فأوجد قيمة أ ثم احسب قيمة كل من المتوسط والانحراف المعيارى للمتغير العشوائى سـ.

السؤال الثالث:

(أ) إذا كانت الأجور الشهرية لمجموعة من الموظفين فى إحدى الشركات تتوزع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط μ وانحراف معيارى σ = ٢٥٠ جنيهًا وكانت النسبة المئوية لعدد الموظفين الذين تزيد أجورهم عن ٢١٥٠ جنيهًا هى ٩٧,٧٢٪ فأوجد قيمة μ .

(ب) إذا كانت س متغيرًا عشوائيًا متصلاً ، دالة كثافة الاحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٨}(س + ك) & \text{عندما } ٢ \leqslant س \leqslant ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

١ أوجد قيمة ك

٢ أوجد ل (سـ $<$ ٣)

السؤال الرابع :

(أ) إذا كان $\sum$س = ٤٠ ، $\sum$ص = ٣٠ ، $\sum$س^٢ = ٣٦٠ ، $\sum$ص^٢ = ٢٠٠ ، $\sum$س ص = ٢٣٢ ، ن = ٥ فأوجد :

١ معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين س ، ص .

٢ معادلة خط انحدار ص على س ثم قدر قيمة ص عندما س = ٩

(ب) إذا كان صـ متغيرًا عشوائيًا معياريًا فأوجد قيمة ك إذا كان : ل (ص $\geqslant$ ك) = ٠,١١٧٠ .

الاختبار الثالث

السؤال الأول:

(أ) أكمل العبارات الآتية:

(١) إذا كان ل(ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٦}$ فإن ل (أَ | بَ) يساوى ....

(٢) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا مداه {٠، ١، ٢، ٣، ٤} وكان ل(س = ٠) = ل(س = ٤) = $\frac{١}{١٦}$، ل (س = ١) = ل (س = ٣) = $\frac{١}{٤}$ فإن ل (س = ٢) يساوى ....

(٣) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هى :

د(س) = { أ عندما ، -٣ ⩽ س ⩽ ٣ ؛ صفر فيما عدا ذلك

فإن أ تساوى ....

(٤) إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين ، ل(أ) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٦ فإن ل (أ ∪ ب) = س فإن س = ...

(٥) إذا كانت أطوال مجموعة مكونة من ١٠٠٠ شخص تتبع توزيعًا طبيعيًا متوسطة $\frac{١}{٢}$ ١٧٦ وانحرافه المعيارى ٥ فإن عدد الأشخاص الذين يزيد طول كل منهم عن ١٨٥ سم يساوى ..

(ب) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف فأثبت أن :

ل(ب) = ل(أ) × ل (ب | أ) + ل (أَ) × ل (ب | أَ) ثم استخدم ذلك فى حساب ل (ب)

إذا كان ل (أ) = ٠,٦ ، ل (ب | أَ) = ٠,٨ ، ل(ب | أ) = ٠,٣

السؤال الثانى:

(أ) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هى :

د(س) = { $\frac{٢س + ١}{٢٤}$ ، ٢ ⩽ س ⩽ ٥ ؛ صفر فيما عدا ذلك

احسب كلًّا من :

(١) ل (٣ ⩽ س ⩽ ٥)   (٢) ل (س ⩾ ٤)

(ب) أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين المتغيرين س ، ص من بيانات الجدول الآتى :

س	١٠	١٦	١٥	١٧	١٨
ص	٥	٧	٨	٦	٩

السؤال الثالث:

(أ) إذا كانت س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا وكان توزيعه الاحتمالي يعطى بالدالة د حيث

د(س) = $\frac{س}{١٠}$ ، س ∈ { ١، ٢، ٣، ك} فأوجد :

(١) قيمة ك واكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

(٢) التوقع والتباين للمتغير العشوائي س.

(ب) إذا كانت س متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا وسطه الحسابي μ = ٥٠ ، وانحرافه المعياري σ فأوجد σ إذا كان ل (س ≥ ٣٧,٢٥) = ٠,٠٤٤٦

السؤال الرابع:

(أ) لدراسة العلاقة بين الكمية المطلوبة (ص) بالكيلو جرام والسعر (س) بالجنية لمنتج معين كان لدينا البيانات الآتية:

مج س = ٢٥ ، مج ص = ٣٠ ، مج س ص = ١٨١ ،

مج س^{٢} = ١٥٥ ، مج ص^{٢} = ٢٤٩ ، ن = ٥ أوجد:

(١) معامل الارتباط لبيرسون بين س ، ص.

(٢) معامل انحدار الكمية المطلوبة على السعر.

(ب) إذا كان ل (ب | أ) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (ب | أ') = $\frac{٥}{٨}$ ، ل(أ) = $\frac{٣}{٤}$ أوجد ل (أ ∪ ب)

الاختبار الرابع

السؤال الأول:

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) صندوق به ١٥ مصباحًا من بينها ٥ معيبة، إذا سحب مصباحان عشوائيًا الواحد تلو الآخر دون إحلال فإن احتمال أن يكون المصباحان معيبين هو:

أ $\frac{١}{٣}$ ب $\frac{٢}{٥}$ جـ $\frac{٢}{٧}$ د $\frac{٢}{٢١}$

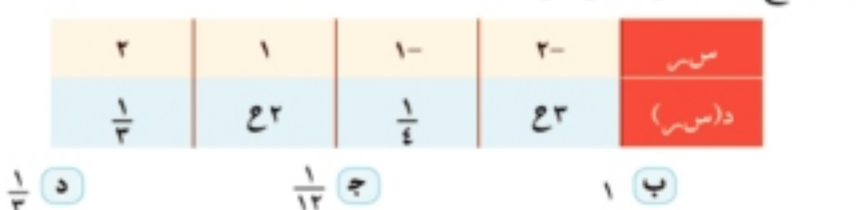
(٢) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف وكان أ ⊂ ب فإن ل (ب/ أ) يساوى

أ ل(أ) ب ل(ب) جـ ل (أ-ب) د ل (ف)

(٣) إذا كانت جميع النقاط فى شكل الانتشار تقع على خط مستقيم فإن معامل الارتباط بين المتغيرين يساوى :

أ -١ ب صفر جـ $\frac{١}{٢}$ د $\frac{٣}{٤}$

④ قيمة ع فى التوزيع الاحتمالى التالى هى :



$س_ر$	-٢	-١	١	٢
د($س_ر$)	٣ع	$\frac{١}{٤}$	٢ع	$\frac{١}{٣}$

(أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) ١ (ج) $\frac{١}{١٢}$ (د) $\frac{١}{٣}$

⑤ إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س هو ك

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٣} & ، ١ \leqslant س \leqslant ٤ \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$$

فإن ل ($س$ > ٢) = ______

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (ج) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

(ب) أ ، ب حدثان من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية ، ل (أ َ) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (بَ | أ) = $\frac{٢}{٥}$ فاحسب ل (أ ∩ ب)

السؤال الثانى:

(أ) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا توزيعه الاحتمالى كالآتى :

$س_ر$	صفر	١	٢	٣	٤
د($س_ر$)	٠,٢٥	٠,٢	٠,١	٠,٣	٠,١٥

أوجد المتوسط والانحراف المعيارى للمتغير العشوائى $س$.

(ب) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى فى كل مرة.

احسب احتمال وقوع الأحداث التالية :

① ظهور عددين مجموعهما أكبر من ٨

② ظهور عددين الفرق المطلق بينهما أصغر من ٢ بشرط مجموعهما أكبر من ٨

السؤال الثالث:

(أ) الجدول التالى يبين تقديرات ستة طلاب فى مادتى الفيزياء والرياضيات

تقديرات الفيزياء	مقبول	جيد	ممتاز	ضعيف	جيد جدًا	جيد
تقديرات الرياضيات	مقبول	جيد جدًا	جيد جدًا	مقبول	ممتاز	ضعيف

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان مبينًا نوعه.

(ب) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا دالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٤} (س + أ) & \text{حيث صفر} \leqslant س \leqslant ٢ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد قيمة أ ثم احسب ل $(\frac{١}{٢} \leqslant س \leqslant \frac{٣}{٢})$

السؤال الرابع:

(أ) إذا كان المتوسط لمتغير عشوائي يساوي ١٥٠ وكان معامل الاختلاف له يساوي ٢٪ أوجد التباين لهذا المتغير العشوائي.

(ب) في دراسة العلاقة بين الوزن س (بالكيلو جرام) والطول ص (بالسنتيمتر) لستة أشخاص وجد أن:

$\sum$ س = ٣٧٤ ، $\sum$ ص = ٩١٣ ، $\sum$ س^٢ = ٢٤٣٦٤ ،

$\sum$ ص^٢ = ١٩٣٦٢٤ ، $\sum$ س ص = ٥٢٢٦٠ أوجد:

(١) معامل الارتباط الخطي لبيرسون بين س ، ص.

(٢) معادلة خط انحدار ص على س .

الاختبار الخامس

السؤال الأول:

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان ل(أَ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٤ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ فإن ل (أ | بَ) =

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٥}{٦}$ (ج) ١ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٢) قيمة المعامل الذي يمثل أقوى علاقة بين متغيرين هو:

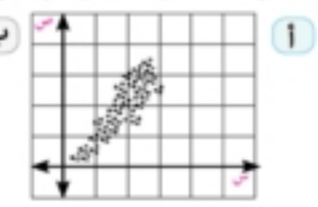
(أ) -٠,٢ (ب) ٠,١ (ج) -٠,٨ (د) ٠,٧

(٣) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا مداه { ١، ٢، ٣، ٥} ، وكان ل (س = ١) = ٢ ل (س = ٢) = $\frac{١}{٤}$ ، ل ((س = ٣) = $\frac{٧}{١٦}$ فإن ل (س = ٥) يساوي

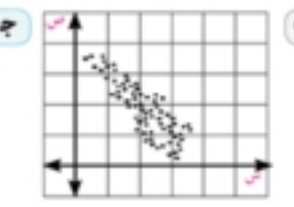
(أ) $\frac{٣}{٨}$ (ب) $\frac{٣}{١٦}$ (ج) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{١١}{١٦}$

(٤) شكل الانتشار الذي يمثل ارتباط طردي هو

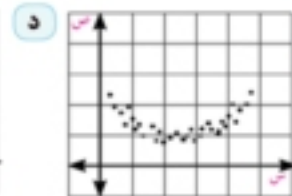
(أ)



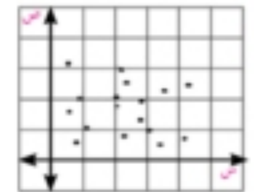
(ب)



(ج)



(د)



(٥) إذا كان في علاقة بين متغيرين س، ص Σ سـر • د(سـر) = ٤ ، Σ سـر^٢ • د(سـر) = ٢٥ فإن معامل الاختلاف يساوي:

(أ) ١٦٪　　(ب) ٧٥٪　　(جـ) ٦٤٪　　(د) ١٥,٦٪

(ب) إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية ، ل (أ) = ٢ل(ب) = س ، ل (أ∪ ب) = $\frac{٧}{٩}$
فأوجد قيمة س.

السؤال الثاني:

(أ) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هي:

د(س) = { $\frac{١}{٣٢}$ (س + ٤) حيث - ك ⩽ س ⩽ ك
　　　　 صفر　　　　فيما عدا ذلك

أوجد:

(١) قيمة ك　　(٢) ل (س ⩾ ٠)　　(٣) ل (-٢ ⩽ س ⩽ ٢)

(ب) الجدول التالي يبين التقديرات التي حصل عليها ثمانية طلاب في إحدى الكليات في مادتي الرياضيات والفيزياء:

تقديرات الرياضيات(س)	ممتاز	جيد	جيد جدًا	جيد جدًا	ضعيف	ممتاز	مقبول	جيد جدًا
تقديرات الفيزياء(ص)	جيد جدًا	جيد جدًا	جيد	ممتاز	مقبول	ممتاز	مقبول	ممتاز

أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين التقديرات في المادتين، وحدد نوعه.

السؤال الثالث:

(٤) إذا كانت أوزان الطلاب في إحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابي ٥٥ كجم وانحرافه المعياري σ وكانت أوزان ٣٣٪ من الطلاب تزيد عن ٦٦ كجم فأوجد :

(١) الانحراف المعياري

(٢) إذا كان عدد الطلاب ١٠٠٠٠ طالب فاحسب عدد الطلاب الذين تقل أوزانهم عن ٦٠ كجم.

(ب) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا وسطه الحسابي μ = ٣ وتوزيعه الاحتمالي كما يلي:

سـر	صفر	ك	٣	٤
د(سـر)	م	$\frac{١}{٦}$	٤م	٥م

أوجد:

(١) قيمتي م ، ك　　(٢) الانحراف المعياري ومعامل الاختلاف للمتغير س.

السؤال الرابع:

(أ) صندوق به خمس بطاقات متماثلة مرقمة من ١ إلى ٥ سحبت بطاقتان واحدة تلو الأخرى مع الإحلال. أوجد احتمال:

١) أن يكون مجموع العددين على البطاقتين عددًا أوليًا.

٢) أن يكون حاصل ضرب العددين أقل من ٧ إذا كان مجموعهما عددًا أوليًا.

(ب) فى دراسة للعلاقة بين المتغيرين س ، ص حصلنا على النتائج التالية:

ن = ١٠ ، $\sum$ س = ٣٥ ، $\sum$ ص = ٦٠ ، $\sum$ س ص = ١٨٧

$\sum$ س^{٢} = ١٣٤ ، $\sum$ ص^{٢} = ٤٠٦ فأوجد ك

١) معادلة خط انحدار ص على س .

٢) معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين س ، ص ثم حدد نوعه.

الاختبار السادس

السؤال الأول:

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) أقوى معامل ارتباط فيمايلى هو:

أ) ٠,٧ ب) ١,٢ جـ) -٠,٩ د) -٠,٣

٢) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا مداه {١، ٢، ٣} فإن الدالة التى تمثل دالة التوزيع الاحتمالى هى :

أ) د(س) = $\frac{\text{س + ٢}}{\text{٨}}$ ب) د(س) = $\frac{\text{س + ١}}{\text{٣}}$ جـ) د(س) = $\frac{\text{س}}{\text{٦}}$ د) د(س) = $\frac{\text{٢س + ٣}}{\text{٦}}$

٣) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد فردى إذا ظهر عدد أقل من ٤ هو :

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{٢}{٣}$ جـ) $\frac{٣}{٤}$ د) $\frac{١}{٢}$

٤) إذا كان أ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٥ ، ل(ب) = ٠,٦ فإن ل (أ $\cup$ ب) = ٠

أ) ٠,٣ ب) ١,١ جـ) ٠,٨ د) ٠,١

٥) إذا كان سـ متغيرًا طبيعيًا وسطه μ= ٦ والانحراف المعيارى له σ= ٣ فإن المتغير الذى يخضع لتوزيع طبيعى معيارى هو:

أ) $\frac{\text{٦ - سـ}}{\text{٣}}$ ب) $\frac{\text{سـ - ٣}}{\text{٦}}$ جـ) $\frac{\text{سـ - ٦}}{\text{٣}}$ د) $\frac{\text{٣ - سـ}}{\text{٦}}$

(ب) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان ل (أ$'$) =٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٣ ، ل (أ $\cup$ ب) =٠,٩
احسب ل (أ | ب$'$)

السؤال الثانى:

(أ) الجدول التالى يبين تقديرات ستة طلاب فى مادتى الرياضيات (س) والإحصاء (ص):

س	جيد	جيد جدًا	ضعيف	ممتاز	مقبول	ضعيف
ص	مقبول	ضعيف	جيد	مقبول	جيد جدًا	ممتاز

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص وبين نوعه .

(ب) إذا كانت س متغيرًا عشوائيًا متصلا

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{١٨}(س + ٢) & \text{حيث } -٢ \leqslant س \leqslant ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

اولاً: اثبت أن د(س) دالة كثافة إحتمال للمتغير العشوائى س :

ثانيًا: أوجد ل $(٠ \leqslant س \leqslant ٢)$

السؤال الثالث:

(أ) إذا كانت س متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ فأحسب .

١) ل $(\mu \leqslant س \leqslant \mu + \sigma)$

٢) ل $(\mu - \frac{٧}{٤}\sigma \leqslant س \leqslant \mu + \frac{٧}{٤}\sigma)$

٣) ل $(س - \mu \leqslant ١,٨\sigma)$

(ب) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا توزيعه الاحتمالى كالتالى :

$س_ر$	١-	٠	١	٢	٤
$د(س_ر)$	٢ل	ل	٣ل	٢ل	ل

أوجد قيمة ل ثم احسب المتوسط وتباين المتغير العشوائى س.

السؤال الرابع:

إذا كان :

$\sum س = ٥٤٠$ ، $\sum ص = ٤٦٠$ ، $\sum س^٢ = ٣٧١١٢$

$\sum ص^٢ = ٢٨٢٥٢$ ، $\sum س ص = ٣٠٧٨٢$ ، $ن = ٨$

أولًا: احسب معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين المتغيرين س ، ص.

ثانيًا: قدر قيمة ص عندما س = ٣٠ باستخدام معادلة خط الانحدار.

الاختبار السابع

السؤال الأول:

(أ) أكمل ماياتي:

1. إذا وقعت النقطتان (٦، ٥) ، (٣، ٨) على خط انحدار ص على س فإن نوع الارتباط بين س ، ص يكون ....
2. إذا كان س متغيرًا عشوائيًا مداه {-١، ٠، ك} ، دالة التوزيع الاحتمالى له هى د(س) = $\frac{س + ٢}{٤}$ فإن ك = ...
3. إذا كان ل (أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل (أ') = $\frac{١}{٤}$ فإن ل (ب | أ) = ...
4. إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٤ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٥٨ فإن ل (ب) = ...
5. إذا كانت س متغيرًا طبيعيًا وسطه μ = ٤ وتباينه = ٢٥ فإن ل(س ≤ ١٤) = ...

(ب) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه الحسابى μ = ٥٥ وانحرافه المعيارى σ فأوجد التباين الذى يحقق أن: ل (س ≥ ٤٥) = ٠,٢٢٨ .

السؤال الثانى:

(أ) إذا كانت س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا مداه {-٣، -٢، ١، ٢} وكان ل (س = -٣) = ل (س = -٢) = $\frac{١}{٨}$ ، ل (س = ٢) = $\frac{١}{٢}$ ،

احسب:

أولاً: ل(س = ١)   **ثانيًا:** التوقع والتباين للمتغير العشوائى س.

(ب) الجدول التالى يبين تقديرات ستة طلاب فى إمتحان مادتى الرياضيات والكيمياء

تقديرات الرياضيات	جيد جدًا	ضعيف	مقبول	جيد	ممتاز	مقبول
تقديرات الكيمياء	مقبول	جيد	جيد جدًا	مقبول	ضعيف	ممتاز

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان وبين نوعه .

السؤال الثالث:

(أ) إذا كانت س متغيرًا عشوائيًا متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٢٤} س + ك & حيث \ ١ \leq س \leq ٥ \\ صفر & فيما \ عدا \ ذلك \end{cases}$$

فاحسب قيمة ك ثم أوجد ل (٢ ≤ س ≤ ٤)

(ب) إذا علم أن احتمال أن يكون الجو ممطرًا هو ٠,٢٤ واحتمال أن يكون الجو عاصفًا هو ٠,٣٦ واحتمال أن يكون الجو ممطرًا وعاطفًا هو ٠,١٤ فاحسب احتمال كل من الأحداث الآتية:

أولاً: أن يكون الجو ممطرًا أو عاصفًا.

ثانيًا: أن يكون الجو ممطرًا حيث إنه غير عاصف.

السؤال الرابع:

(أ) في دراسة للعلاقة بين متغيرين س ، ص إذا علم أن:

$\sum$س = ٤٧٧ ، $\sum$ص = ٢٢٢ ، $\sum$س ص = ١٥١٨٤ ، $\sum$س^{٢} = ٣٢٥٩٣ ،

ن = ٧ أوجد معادلة خط انحدار ص على س ثم قدر قيمة ص عندما س = ١٠٠

(ب) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطة μ، انحرافه المعياري σ = ٨ ، وكان ل(س > ٦٤) = ٠,٠٦٦٨

احسب المتوسط μ.

الاختبار الثامن

السؤال الأول:

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كانت معادلة خط انحدار ص على س هي ص = ٠,٢ س + ٣ فإن قيمة ص المتوقعة عندما س = ٥ هي :

(أ) ٠,٢ (ب) ٣,٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا وكان التوقع يساوي ٣ ، $\sum$ س$_{ر}^{٢}$ • د(س$_{ر}$) = ١٤,٥ فإن الانحراف المعياري يساوي:

(أ) ١١,٥ (ب) ٥,٥ (جـ) ٤,٨ (د) ٢,٣٥

(٣) إذا كان ل(أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ - ب) = $\frac{٣}{٨}$ فإن ل (ب$'$ | أ) = :

(أ) $\frac{٣}{٨}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٩}{٣٢}$ (د) $\frac{٣}{١٦}$

(٤) إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٣ فإن ل (ب - أ) يساوى

(أ) ٠,٩ (ب) ٠,٣ (جـ) ٠,١٨ (د) ٠,١٢

(٥) إذا كان ص متغيرًا عشوائيًا معياريًا فإن : ل (ص ≤ ١,٥) تساوى لأقرب رقمين عشريين :

(أ) ٢,٢٣ (ب) ١,٥١ (جـ) ٠,٠٧ (د) ١,٢١

(ب) في تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين مرة واحدة . احسب احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين فرديًا علمًا بأن العدد الظاهر على الوجه الأول هو ٤

السؤال الثاني:

(أ) إذا كانت س متغيرًا عشوائيًا متصلًا دالة كثافة الاحتمال له هي :

د(س) = { $\frac{١}{١٢}$ (٢ س + ١) حيث صفر ≤ س ≤ ٣
صفر فيما عدا ذلك

احسب : **أولاً:** ل(س ≤ ٢) **ثانيًا:** ل (١ ≤ س ≤ ٢).

(ب) الجدول التالى يبين درجات ستة طلاب فى مادتى الإحصاء والرياضيات

درجة الإحصاء	٢٢	٢٥	١٩	٢٤	٢٥	١٣
درجة الرياضيات	٤٥	٣٥	٤٠	٢٨	٤٠	٢٥

احسب معامل الارتباط لسبيرمان بين درجتى الإحصاء والرياضيات مبينًا نوعه .

السؤال الثالث :

(أ) فى امتحان الرياضيات كانت درجات الطلبة موزعه توزيعًا طبيعيًا بمتوسط قدره ٧٠ وانحراف معيارى ٥ احسب عدد الطلاب المحتمل أن تزيد درجاتهم عن ٧٨ إذا علم أن عدد الطلبة المتقدمين لهذا الامتحان ١٠٠٠٠ طالب.

(ب) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا توزيعه الاحتمالى كالتالى:



سـر	-٢	-١	صفر	٣	٤
د(سـر)	$\frac{١}{٤}$ أ	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{١}{٨}$ أ	$\frac{٣}{٨}$

أوجد قيمة أ ثم أوجد المتوسط الحسابى والتباين للمتغير س.

السؤال الرابع:

(أ) فى دراسة للعلاقة بين متغيرين س ، ص حصلنا على النتائج التالية:

ن = ٧ ، $\sum$س = ١٤٧ ، $\sum$ص = ٩٩ ، $\sum$س ص = ٢١٢٣

$\sum$س^{٢} = ٣٤٣٠

(١) أوجد معادلة خط انحدار ص على س (٢) قدر قيمة ص عندما س = ٢٠

(ب) أ ، ب حدثان مستقلان وكان ل (أ) = ٠,٦ ، ل (أ - ب) = ٠,٣٦ احسب ل (أ ∪ ب)

الاختبار التاسع

السؤال الأول:

(أ) أكمل مايأتى :

(١) إذا كانت ل (أ َ) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل (ب | أ) = $\frac{١}{٢}$ فإن ل (أ ∩ ب) = ...

(٢) إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س هو:

سـر	-١	٠	٢
د(سـر)	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٢}$

فإن التوقع يساوى ....

③ إذا كان أ، ب حدثين مستقلين من ف ، ل (ب‾) = ٠,٤ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨ فإن ل (أ) = ...

④ في معادلة خط انحدار ص على س : ص = ب س + أ إذا كان معامل س أقل من صفر فإن الارتباط بين المتغيرين س، ص يكون ....

⑤ إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متوسطه ٧٥ وانحرافه المعياري ٤ فإن ل (سـ < ٨٥) = ...

(ب) فصل دراسي به ٤٢ طالبًا منهم ٢٨ يدرسون الانجليزية، ٢١ يدرسون الايطالية، ٧ يدرسون اللغتين معًا، اختير طالب من هذا الفصل عشوائيًّا، احسب احتمال أن يدرس الطالب المختار:

أولاً: المادتين معًا　　　　**ثانيًا:** اللغة الإنجليزية إذا كان دارسا للإيطالية

السؤال الثاني:

(أ) من بيانات الجدول الآتي :

س	٩	١٢	١١	١٤	١٠	١٢
ص	١٥	٢٠	١٩	٢٣	١٧	١٨

أولاً: احسب معامل الارتباط لبيرسون وبين نوعه .

ثانيًا: باستخدام خط انحدار مناسب قدر قيمة ص واحسب قيمة الخطأ عندما س =١١

(ب) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل(ب‾|أ) = ٠,٤ ، ل (أ |ب) =٠,٣ ، ل(أ) + ل (ب) = ٠,٣٦ فأوجد ل(أ)، ل (أ ∪ ب)

السؤال الثالث:

(أ) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلا

د(س) = { $\frac{١}{٨}$ س　حيث ٣ ⩽ س ⩽ ٥
　　　　 صفر　فيما عدا ذلك

أولاً: أثبت د(س) دالة كثافة للمتغير العشوائي س

ثانيًا: أوجد ل (س > ٤)

(ب) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا وسطه الحسابي μ = ١٥ وانحرافه المعياري σ= ٥ أوجد

① ل (١٢ > س > ١٧)　　　② قيمة ك حيث ل (سـ < ك) = ٠,٣٤٤٦

السؤال الرابع:

(أ) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا مداه { ٠، ١، ٣، ٥} وكان ل(س = ٠) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (س = ١) = $\frac{١}{٦}$ ، ل (س = ٣) = $\frac{١}{٤}$

فأوجد:

أولاً: التوزيع الاحتمالي للمتغير س　　　**ثانيًا:** المتوسط الحسابي ومعامل الاختلاف للمتغير س

(ب) صندوق يحتوي على ٧ كرات بيضاء ، ٨ كرات حمراء ، ٥ سوداء ، سحبت كرتان على التوالي دون إحلال احسب احتمال:

أولاً: أن تكون الكرة الثانية بيضاء إذا كانت الأولى بيضاء.

ثانيًا: أن تكون الكرة الأولى حمراء والكرة الثانية حمراء.

الاختبار العاشر

السؤال الأول:

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا مداه {٠، ١، ٢، ٣} وكان ل (س = ٠) = $\frac{١}{٨}$ ، ل (س = ٢) = $\frac{١}{٢}$ ل (س = ٣) = $\frac{١}{٤}$ فإن ل (س = ١) تساوي ....

(أ) $\frac{١}{٤}$　(ب) $\frac{١}{٨}$　(جـ) $\frac{١}{٢}$　(د) ١

٢) إذا كان ل (أ -ب) = ٠,٠٤ ، ل (أ∩ ب) = ٠,١ فإن ل (ب′| أ) يساوي :

(أ) ٠,٣　(ب) ٠,٥　(جـ) ٠,٠٤　(د) ٠,٨

٣) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين ، ل (أ) = ٠,٣ ، ل (ب′) = ٠,٤ فإن ل (أ∪ ب) يساوي ....

(أ) ٠,٣　(ب) ٠,٧　(جـ) ٠,٩　(د) ٠,٦

٤) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا وسطه الحسابي μ= ٤٥ وانحرافه المعياري σ = ٥ فإن ل (س≥ ٥٥) يساوي ....

(أ) ٠,٤٧٧٢　(ب) ٠,٩٧٧٢　(جـ) ٠,٠٢٢٨　(د) ٠,٢٣٨٦

٥) إذا كانت معادلة خط انحدار ص على س هي : ص = ٣ - س فإن الارتباط بين قيم س ، قيم ص يكون :

(أ) منعدمًا　(ب) طرديًا　(جـ) عكسيًا　(د) تامًا

(ب) إذا كانت درجات الطلاب في إحدى المدارس تتبع توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابي μ= ٤٢ وانحرافه المعياري σ حيث حصل ٢٦,١١٪ من الطلاب على أكثر من ٥٠ درجة أوجد σ .

السؤال الثانى:

(أ) أوجد معامل الارتباط لسبيرمان من بيانات الجدول التالي وبين نوعه :

س	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص	٣٥	١٢	١٧	٢٥	١٢	٧

(ب) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل (أ∪ ب) = ٠,٨ ، ل(ب) = ٠,٤ ، ل (أ َ) =٠,٣
احسب ل (بَ | أ)

السؤال الثالث :

(أ) س متغير عشوائى متصل دالة كثافة الاحتمال له هى:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{\text{١}}{\text{٦}}\text{س} + \text{ك} & \text{حيث } \text{٠} \leqslant \text{س} \leqslant \text{٣} \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد قيمة ك ثم أوجد ل (١,٥ ≥ س ≥ ٢,٥)

(ب) إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين من فضاء عينة لتجربة عشوائية و كان ل(ب) = ٠,٤ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٢٤
فاحسب ل (أ∪ بَ) ، ل (أ∪ ب)

السؤال الرابع:

(أ) حجرا نرد منتظمان، الأول كتب على كل وجهين متقابلين منه أحد الأعداد ١، ٣، ٥ والثانى كتب على كل وجهين متقابلين منه أحد الأعداد ٢، ٤، ٦ فإذا أُلقِي الحجران وكان المتغير العشوائى س يعبر عن مجموع العددين الظاهرين فأوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير س واحسب التوقع ومعامل الاختلاف.

(ب) البيانات التالية تمثل الإنفاق ص والدخل س بالجنيه فى اليوم لعينة:

س	٥٠	٦٠	٤٥	٧٠	٦٥	٩٠
ص	٤٥	٣٥	٣٥	٥٠	٥٥	٧٠

أولاً: قدر الإنفاق إذا كان الدخل ٦٣

ثانيًا: احسب الخطأ عندما س = ٤٥

جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعي المعياري

ى	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٠٠٠٠	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٨٠	٠,٠١٢٠	٠,٠١٦٠	٠,٠١٩٩	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٧٩	٠,٠٣١٩	٠,٠٣٥٩
٠,١	٠,٠٣٩٨	٠,٠٤٣٨	٠,٠٤٧٨	٠,٠٥١٧	٠,٠٥٥٧	٠,٠٥٩٦	٠,٠٦٣٦	٠,٠٦٧٥	٠,٠٧١٤	٠,٠٧٥٣
٠,٢	٠,٠٧٩٣	٠,٠٨٣٢	٠,٠٨٧١	٠,٠٩١٠	٠,٠٩٤٨	٠,٠٩٨٧	٠,١٠٢٦	٠,١٠٦٤	٠,١١٠٣	٠,١١٤١
٠,٣	٠,١١٧٩	٠,١٢١٧	٠,١٢٥٥	٠,١٢٩٣	٠,١٣٣١	٠,١٣٦٨	٠,١٤٠٦	٠,١٤٤٣	٠,١٤٨٠	٠,١٥١٧
٠,٤	٠,١٥٥٤	٠,١٥٩١	٠,١٦٢٨	٠,١٦٦٤	٠,١٧٠٠	٠,١٧٣٦	٠,١٧٧٢	٠,١٨٠٨	٠,١٨٤٤	٠,١٨٧٩
٠,٥	٠,١٩١٥	٠,١٩٥٠	١٩٨٥.٠	٠,٢٠١٩	٠,٢٠٥٤	٠,٢٠٨٨	٠,٢١٢٣	٠,٢١٥٧	٠,٢١٦٠	٠,٢٢٢٤
٠,٦	٠,٢٢٥٩	٠,٢٢٩١	٠,٢٣٢٤	٠,٢٣٥٧	٠,٢٣٨٩	٠,٢٤٢٢	٠,٢٤٥٤	٠,٢٤٨٦	٠,٢٥١٧	٠,٢٥٤٩
٠,٧	٠,٢٥٨٠	٠,٢٦١١	٠,٢٦٤٢	٠,٢٦٧٣	٠,٢٧٠٤	٠,٢٧٣٤	٠,٢٧٦٤	٠,٢٧٩٤	٠,٢٨٢٣	٠,٢٨٥٢
٠,٨	٢٨٨١	٠,٢٩١٠	٠,٢٩٣٩	٠,٢٩٦٧	٠,٢٩٩٥	٠,٣٠٢٣	٠,٣٠٥١	٠,٣٠٧٨	٠,٣١٠٦	٠,٣١٣٣
٠,٩	٠,٣١٥٩	٠,٣١٨٦	٠,٣٢١٢	٠,٣٢٣٨	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٨٩	٠,٣٣١٥	٠,٣٣٤٠	٠,٣٣٦٥	٠,٣٣٨٩
١,٠	٠,٣٤١٣	٠,٣٤٣٨	٠,٣٤٦١	٠,٣٤٨٥	٠,٣٥٠٨	٠,٣٥٣١	٠,٣٥٥٤	٠,٣٥٧٧	٠,٣٥٩٩	٠,٣٦٢١
١,١	٠,٣٦٤٣	٠,٣٦٦٥	٠,٣٦٨٦	٠,٣٧٠٨	٠,٣٧٢٩	٠,٣٧٤٩	٠,٣٧٧٠	٠,٣٧٩٠	٠,٣٨١٥	٠,٣٨٣٠
١,٢	٠,٣٨٤٩	٠,٣٨٦٩	٠,٣٨٨٨	٠,٣٩٠٧	٠,٣٩٢٥	٠,٣٩٤٤	٠,٣٩٦٢	٠,٣٩٨٠	٠,٣٩٩٧	٠,٤٠١٥
١,٣	٠,٤٠٣٢	٠,٤٠٤٩	٠,٤٠٦٦	٠,٤٠٨٢	٠,٤٠٩٩	٠,٤١١٥	٠,٤١٣١	٠,٤١٤٧	٠,٤١٦٢	٠,٤١٧٧
١,٤	٠,٤١٩٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤٢٢٢	٠,٤٢٣٦	٠,٤٢٥١	٠,٤٢٦٥	٠,٤٢٧٩	٠,٤٢٩٢	٠,٤٣٠٦	٠,٤٣١٩
١,٥	٠,٤٣٣٢	٠,٤٣٤٥	٠,٤٣٥٧	٠,٤٣٧٠	٠,٤٣٨٢	٠,٤٣٩٤	٠,٤٤٠٦	٠,٤٤١٨	٠,٤٤٢٩	٠,٤٤٤١
١,٦	٠,٤٤٥٢	٠,٤٤٦٣	٠,٤٤٧٤	٠,٤٤٨٤	٠,٤٤٩٥	٠,٤٥٠٥	٠,٤٥١٥	٠,٤٥٢٥	٠,٤٥٣٥	٠,٤٥٤٥
١,٧	٠,٤٥٥٤	٠,٤٥٦٤	٠,٤٥٧٣	٠,٤٥٨٢	٠,٤٥٩١	٠,٤٥٩٩	٠,٤٦٠٨	٠,٤٦١٦	٠,٤٦٢٥	٠,٤٦٣٣
١,٨	٠,٤٦٤١	٠,٤٦٤٩	٠,٤٦٥٦	٠,٤٦٦٤	٠,٤٦٧١	٠,٤٦٧٨	٠,٤٦٨٦	٠,٤٦٩٣	٠,٤٦٩٩	٠,٤٧٠٦
١,٩	٠,٤٧١٣	٠,٤٧١٩	٠,٤٧٢٦	٠,٤٧٣٢	٠,٤٧٣٨	٠,٤٧٤٤	٠,٤٧٥٠	٠,٤٧٥٦	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٦٧
٢,٠	٠,٤٧٧٢	٠,٤٧٧٨	٠,٤٧٨٣	٠,٤٧٨٨	٠,٤٧٩٣	٠,٤٧٩٨	٠,٤٨٠٣	٠,٤٨٠٨	٠,٤٨١٢	٠,٤٨١٧
٢,١	٠,٤٨٢١	٠,٤٨٢٦	٠,٤٨٣٠	٠,٤٨٣٤	٠,٤٨٣٨	٠,٤٨٤٢	٠,٤٨٤٦	٠,٤٨٥٠	٠,٤٨٥٤	٠,٤٨٥٧
٢,٢	٠,٤٨٦١	٠,٤٨٦٤	٠,٤٨٦٨	٠,٤٨٧١	٠,٤٨٧٥	٠,٤٨٧٨	٠,٤٨٨١	٠,٤٨٨٤	٠,٤٨٨٧	٠,٤٨٩٠
٢,٣	٠,٤٨٩٣	٠,٤٨٩٦	٠,٤٨٩٨	٠,٤٩٠١	٠,٤٩٠٤	٠,٤٩٠٦	٠,٤٩٠٩	٠,٤٩١١	٠,٤٩١٣	٠,٤٩١٦
٢,٤	٠,٤٩١٨	٠,٤٩٢٠	٠,٤٩٢٢	٠,٤٩٢٥	٠,٤٩٢٧	٠,٤٩٢٩	٠,٤٩٣١	٠,٤٩٣٢	٠,٤٩٣٤	٠,٤٩٣٦
٢,٥	٠,٤٩٣٨	٠,٤٩٤٠	٠,٤٩٤١	٠,٤٩٤٣	٠,٤٩٤٥	٠,٤٩٤٦	٠,٤٩٤٨	٠,٤٩٤٩	٠,٤٩٥١	٠,٤٩٥٢
٢,٦	٠,٤٩٥٣	٠,٤٩٥٥	٠,٤٩٥٦	٠,٤٩٥٧	٠,٤٩٥٩	٠,٤٩٦٠	٠,٤٩٦١	٠,٤٩٦٢	٠,٤٩٦٣	٠,٤٩٦٤
٢,٧	٠,٤٩٦٥	٠,٤٩٦٦	٠,٤٩٦٧	٠,٤٩٦٨	٠,٤٩٦٩	٠,٤٩٧٠	٠,٤٩٧١	٠,٤٩٧٢	٠,٤٩٧٣	٠,٤٩٧٤
٢,٨	٠,٤٩٧٤	٠,٤٩٧٥	٠,٤٩٧٦	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٨	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٨٠	٠,٤٩٨١
٢,٩	٠,٤٩٨١	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٣	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٦	٠,٤٩٨٦
٣,٠	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩٠
٣,١	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣
٣,٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥
٣,٣	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٧
٣,٤	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٨
٣,٥	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨

اجابات التمارين

الوحدة الأولى : الارتباط والانحدار

إجابات تمارين (١ – ١)

(١) د (٢) د (٣) ب (٤) جـ

(٥) د (٦) ٠,٩ ر ≃ ٠,٩٤٧ طردى

(٧) ٠,٨٨٥٧ (٨) - ٠,٩٨٥ عكسى

(٩) ٠,٣٣٧٥ طردى (١٠) ٠,٣٨ طردى

(١١) - ٠,٧٤ عكسى (١٢) ≃ - ٠,٩١ عكسى

(١٣) ٠,٧٢٨٥٧١٤ (١٤) ٠,٥٧ طردى

(١٥) ٠,٨٥٤٥ طردى (١٦) ٠,٨٦٦١ طردى

إجابات تمارين (١ – ٢)

(١) ب (٢) ب (٣) جـ (٤) أ

(٥) د (٦) د

(٧) ص = ٠,٧٠٣ + ٠,٧٢٣ س ،

∴ ص ≃ ٩,٣٧٩

(٨) أ ≃ ٨,٨٥٩٢ ب = ٠,٢٨٦٨

(٩) أ ≃ ٠,٦٩٩٩٩ ب ص = ٨,٢س - ١٢,٤

(١٠) أ ص = ٣٦,٨٥ - ٠,٦٣٣٣ س

ب - ٠,٩٢٣٧ عكسى

(١١) أ - ٠,٩١٥٢٢٧ عكسى

ب ص = ٩٤,٤٩٣ - ٩,٥٦٢٨ س

(١٢) أ ٠,٧٦٨٥٦ طردى.

ب ص = ٨,٤٨٢٥ + ٠,٤٠٣٨١ س

جـ ص ≃ ٢٨,٦٧ جنيه

د ٢٨ الخطأ = ٣,٣٧

(١٣) أ ص = ١,٣٥ س - ٠,٣٧٥

ب ≃ ٩٤٤,٦٣ .

إجابات تمارين عامة

(١) أ (٢) جـ (٣) د (٤) د

(٥) ب (٦) أ

(٧) ر ≃ ٠,٤٧ طردى

(٨) ر ≃ ٠,٦٠١٣ طردى

(٩) ر ≃ ٠,٨١٧٩ طردى.

(١٠) ر ≃ -٠,٤١ عكسى

(١١) ر ≃ ٠,٨٩٣٣٧

(١٢) أ ر ≃ ٠,٥٥٢٩٦

ب ص = ٢,٨٢٢٣ + ٠,٣٢٤٩ س ص ≃ ٥,٠٩٦

(١٣) ر ≃ ٠,٩٣ ، صٙ ≃ ١١

(١٤) أ ص = ١١,٥٤٨٣ - ٠,٢٠٥٣ س

ب ص ≃ ٤,٧٧

جـ الخطأ = | ٣ - ٤,٧٧ | ≃ ١,٧٧

إجابة أختيار تراكمى

(١) أ (٢) حـ (٣) حـ (٤) أ

(٥) حـ (٦) ب

(٧) اذا كانت الإشارة موجبة فالأرتباط طردى، واذا كانت الإشارة سالبة فالأرتباط عكسى.

(٨) أ ر ≃ - ٠,٥٢١١ عكسى

ب صٙ = ١٣٥,١٧ - س ،صٙ ≃ ٧٣,١٧

جـ الخطأ = | ٧٢ - ٦٩,١٧| = ٢,٨٣

(٩) أ ر ≃ - ٠,٩٤٢٦

ب ص^ = ١٠,٣٨ - ٠,١٥٤ س

جـ ٤,٢٢

د الخطأ ≃ ١,٥٢٨

الوحدة الثانية: الاحتمال الشرطى

إجابات تمارين (٢ – ١)

(١) ب (٢) أ (٣) $\frac{١}{٣}$ (٤) $\frac{١}{٢}$

(٥) أ

(٦) أولاً: ٠,٢١ ثانيًا: ٠,٨٩

ثالثًا: ٠,٥٢٥ رابعًا: $\frac{١٩}{٣٠}$

(٧) $\frac{٣}{٥}$ (٨) أولاً: $\frac{٢}{٥}$ ثانيًا: $\frac{٢٩}{٣٥}$

(٩) $\frac{٢}{٣}$ (١٠) أولاً: $\frac{١}{٦}$ ثانيًا: $\frac{١}{٢}$

(١١) ٠,٤٢ (١٢) أولاً: $\frac{١١}{١٥}$ ثانيًا: $\frac{٣}{٥}$ ثالثًا: $\frac{١}{٣}$

(١٣) أولاً: $\frac{١}{١١}$ ثانيًا: $\frac{١}{٤}$ ثالثًا: $\frac{٤}{٩}$

(١٤) $\frac{١}{٤}$ (١٥) أولاً: $\frac{١}{١٠}$ ثانيًا: $\frac{٧}{١٦}$

(١٦) $\frac{٣}{٧}$ (١٧) أولاً: $\frac{٤}{١١}$ ثانيًا: $\frac{٥}{٣٣}$ ثالثًا: $\frac{٣٥}{١٣٢}$

(١٨) أولاً: $\frac{٣٦}{٥٣}$ ثانيًا: $\frac{٥٥}{١١٣}$

(١٩) أولاً: $\frac{٥}{٧}$ ثانيًا: $\frac{١}{٢}$ ثالثًا: $\frac{١٣}{٣٠}$

(٢٠) أولاً: $\frac{٣}{٤}$ ثانيًا: $\frac{١}{٢}$ ثالثًا: $\frac{٣}{١٦}$ رابعًا: $\frac{١٣}{١٤}$

(٢١) نشاط: أولاً: $\frac{٥}{٦}$ ثانيًا: $\frac{٢}{٣}$

إجابات تمارين (٢ - ٢)

(١) أ ، جـ ، ز أحداث مستقلة .

ب ، د، هـ ، و أحداث غير مستقلة

(٢) جـ (٣) ب (٤) د (٥) $\frac{١}{١٢}$

(٦) $\frac{١}{١٦}$ (٧) ا ، ب حدثان مستقلان

(٨) أولاً : ٠,٢ ثانيًا: $\frac{٢}{٧}$

(٩) $\frac{١}{٤}$ (١٠) $\frac{١}{١٥}$

(١١) أ $\frac{٣}{٩٥}$ ب $\frac{٩}{١٩٠}$

جـ $\frac{١٥}{١٩٠}$ د $\frac{٢}{٩٥}$

(١٢) أولاً: أ ٠,٢٨ ب ٠,٨٢

جـ ٠,٥٤ د ٠,٧٢

ثانيًا: $\frac{٢}{٥}$

إجابات التمارين العامة

(١) جـ (٢) ب (٣) د (٤) جـ

(٥) أ (٦) $\frac{١}{١٠}$ (٧) $\frac{٢}{٥}$

(٨) ل (أ ∩ ب) = ل (أ) × ل (ب) = $\frac{٣}{٨}$

(٩) أ $\frac{٥}{٩٦}$ ب $\frac{٥}{٣٢}$ جـ $\frac{١}{١٦}$ د $\frac{٣}{١٦}$

(١٠) $\frac{١}{٢}$ $\frac{١}{٨}$ ١

(١١) أ $\frac{١}{٦}$ ب $\frac{٥}{٩}$ جـ $\frac{٤}{٩}$

(١٢) أ ٠,٤٨ ب ٠,٩٢ جـ ٠,٨

(١٣) أ $\frac{٩}{٦٥}$ ب $\frac{٢٤}{٦٥}$ جـ $\frac{١٦}{٦٥}$ د $\frac{١٦}{٦٥}$

(١٤) أ $\frac{١}{٥}$ ب $\frac{١}{٤}$

(١٥) أ $\frac{١٦}{٢٥}$ ب $\frac{٣}{٤}$ جـ $\frac{١}{٥}$

(١٦) أ $\frac{١}{٤}$ ب $\frac{٢}{٩}$

إجابة الاختبار التراكمي

(١) صفر (٢) $\frac{١}{٦}$ (٣) $\frac{٢}{٥}$ (٤) ١

(٥) ب (٦) ب (٧) جـ (٨) - $\frac{٤٥}{٥٦}$

(٩) أ $\frac{١٤}{١٥}$ ب $\frac{١}{٣}$ جـ $\frac{١}{٥}$

(١٠) أ $\frac{٣٣}{٩٥}$ ب $\frac{٢١}{٩٥}$ جـ $\frac{١٤}{٩٥}$

الوحدة الثالثة: المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

إجابات تمارين (٣ - ١)

(١) جـ (٢) أ (٣) ب (٤) أ

(٥) د (٦) د

(٧) أ $\frac{١}{٨}$ ب $\frac{١}{١٠}$ جـ - $\frac{٤}{٥}$ (٨) ٠,١

(٩) م = ١

$س_ر$	-٢	٠	٢	٤
د ($س_ر$)	$\frac{١}{٥}$	$\frac{٢}{٥}$	$\frac{١}{٥}$	$\frac{١}{٥}$

(١٠) أ = ٣

$س_ر$	١	٢	٣	٤
د ($س_ر$)	$\frac{٩}{٥٤}$	$\frac{١٢}{٥٤}$	$\frac{١٥}{٥٤}$	$\frac{١٨}{٥٤}$

(١١) ك = ٥

$س_ر$	١	٢	٣	٤
د ($س_ر$)	$\frac{٨}{٥٠}$	$\frac{١١}{٥٠}$	$\frac{١٤}{٥٠}$	$\frac{١٧}{٥٠}$

(١٢)

$س_ر$	-٣	-١	١	٣
د ($س_ر$)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

(١٣)

$س_ر$	٦	٧	٨	٩	١٠
د ($س_ر$)	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{٣}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{١}{٩}$

(١٤)

$س_ر$	١	٢	٣	٤	٥	٦
د ($س_ر$)	$\frac{١١}{٣٦}$	$\frac{٩}{٣٦}$	$\frac{٧}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{١}{٣٦}$

(١٥)

$س_ر$	١	١,٥	٢	٢,٥	٣	٣,٥	٤
د ($س_ر$)	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$

(١٦) مدى س = {٠، ١، ٢، ٣}

سر	٠	١	٢	٣
د (سر)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

(١٧) نشاط :

سر	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
د (سر)	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{١}{٣٦}$

اولاً: (أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) $\frac{٥}{٦}$ (د) $\frac{١٥}{٣٦}$

ثانيًا: القيمة المتوقعة ٧

إجابات تمارين (٣ - ٢)

(١) ب (٢) ب (٣) جـ (٤) $\mu = \frac{١١}{٣}$

$\sigma = \sqrt{٠،٥}$

(٥) $\mu = -\frac{٢٣}{٢٤}$ $\sigma \simeq ٢،٥١$

(٦) $\mu = \frac{٥}{١٢}$ $\sigma \simeq ١،٥٥$

(٧) **أولاً:** أ = ٠،٤ **ثانيًا:** $\mu = ٣$ ∴ $\sigma \simeq ١،٥٥$

(٨) $\mu = ٢،٦$ $\sigma^٢ = ٠،٩٦$

(٩) **أولاً:** $\frac{١١}{١٦}$ **ثانيًا:** $\mu = ٢$ ، $\sigma^٢ = ١$

(١٠) **اولاً:** ح = $\frac{١}{٣}$

ثانيًا: التوزيع الاحتمالى:

سر	-٣	صفر	٣	٦
د (سر)	$\frac{٣}{٩}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{٣}{٩}$

$\mu = \frac{٥}{٣}$ $\sigma^٢ \simeq ١٤،٢$

(١١) أ = ٦ ، $\sigma^٢ = ١،٥٥$

(١٢) **اولاً:** ا = $\frac{١٣}{٢}$ **ثانيًا:** $\mu = \frac{٧}{٣}$ $\sigma^٢ = \frac{٥}{٩}$

(١٣) **أولاً :** ا = ١٨ **ثانيًا:** معامل الاختلاف = ٣٧،٧ ٪

(١٤) **أولاً:** م = -١ **ثانيًا:** $\mu = \frac{٥}{٨}$ ، $\sigma^٢ = \frac{١٣٥}{٦٤}$

(١٥) **أولاً:** ا = $\frac{٢٠}{١٩}$ **ثانيًا:** $\mu = \frac{٢٣}{١٩}$ ، $\sigma^٢ = ١،٢$

(١٦) **أولاً:** ل (س = ٠) = $\frac{١}{٨}$ ل (س = ٢) = $\frac{٥}{٨}$

ثانيًا: معامل الاختلاف = ١٣٢،٣٪

(١٧) **أولاً:** ا = $\frac{١}{١٢}$ ∴ ك = ٣ **ثانيًا:** $\sigma = ١،١٥$

إجابات تمارين (٣ - ٣)

(١) ب (٢) أ (٣) أ

(٤) **أولاً:** $\frac{١}{٤}$ **ثانيًا:** $\frac{٧}{١٢}$

(٥) **أولاً:** $\frac{٣}{٤}$ **ثانيًا:** $\frac{٥}{١٢}$

(٦) **أولاً:** د (س) دالة كثافة **ثانيًا:** $\frac{٢٠}{٢٧}$

(٧) **أولاً:** $\frac{٤}{٩}$ **ثانيًا:** $\frac{٧}{٩}$

(٨) **أولاً:** ا = $\frac{١}{٨}$ **ثانيًا:** $\frac{١}{٢}$

(٩) **أولاً:** ا = ٠ **ثانيًا:** $\frac{١}{٢}$

(١٠) **أولاً:** ا = $\frac{١}{٤}$ **ثانيًا:** $\frac{١}{٢}$

(١١) **أولاً:** ك = ٨ **ثانيًا:** $\frac{٣}{١٦}$

(١٢) **أولاً:** $\frac{١}{٤}$ **ثانيًا:** $\frac{٧}{٢}$

(١٣) **أولاً:** أ = ١ **ثانيًا:** ب = ٢

إجابات التمارين العامة للوحدة الثالثة

(١) حـ (٢) أ (٣) أ

(٤)

سر	-٣	-١	٠	١	٣
د (سر)	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٣}{١٨}$	$\frac{٤}{٩}$	$\frac{٣}{١٨}$	$\frac{١}{٩}$

(٥) ∴ م = -١

سر	-٢	-١	١	٢
د (سر)	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{٥}{١٦}$	$\frac{٦}{١٦}$

(٦) أ = $\frac{١}{٧}$ $\frac{٥}{١٤}$

(٧)

سر	١	٢	٣	٤	٥	٦
د (سر)	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٧}{٣٦}$	$\frac{٩}{٣٦}$	$\frac{١١}{٣٦}$

(٨) **أولاً:**

سر	٠	٢	٤
د (سر)	$\frac{٣}{٩}$	$\frac{٤}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$

ثانيًا: $\frac{٧}{٩}$

(٩)

سر	٣	٥	٧	٩	١١
د(سر)	١/٩	٢/٩	٣/٩	٢/٩	١/٩

μ = ٧ ، $\sigma \simeq$ ٢,٣٠٩٤

(١٠)

سر	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
د(سر)	١/١٦	٢/١٦	٣/١٦	٤/١٦	٣/١٦	٢/١٦	١/١٦

μ = ٥ ، $\sigma \simeq$ ١,٥٨١

(١١) ب = ١/٩ ، أ = ٣ $\sigma \simeq$ ١,٠٨

(١٢) أولًا: ٣/٨ ثانيًا: ٢٧/٣٢

(١٣) أولًا: أ = ٢ ثانيًا: ٧/١٦

حل اختبار تراكمى على الوحدة الثالثة

(١) ٥/١١ (٢) ٢,١٦ (٣) ٠,٣٨ (٤) ٠,٣٨

(٥) أولًا: ١/٣ ثانيًا: ٢/٣

الوحدة الرابعة: التوزيع الطبيعى

اجابة تمارين (٤-١)

(١) أ ٠,٣٧٤٩ ، ٠,٤٩٢٢ ب ٠,٠١٦٠ ، ٠,٤٤٨٤
جـ ٠,٥١٦ ، ٠,٩٠١ د ٠,٩٤٤٧ ، ٠,٦٩٧١
هـ ٠,٠٧٥٧ ، ٠,٠٦٦٩ و ٠,١٦٠٩ ، ٠,١٣٣٧
ز ٠,٠٧٤٩ ، ٠,٠٢٠٢ ح ٠,٨٧٢٩ ، ٠,٩٨٩٨
ط ٠,٧٤٢٢ ، ٠,٩٢٢٢ ى ٠,٣٢٦٤ ، ٠,٠٥٤٨

(٢) أ ١,٠٦ ب -١,٣٥ جـ ٠,٢٨ د ١,٩٧
هـ -٠,٨٥ و ١,٣٢ ز -٢,٦١
ح -٠,٨٤ ط ٠,٦٥ ى -٠,٣٣

(٣) أ -٠,٩٤ ، ٠,٧٨١٨ ب ٢,٠٤ ، ٠,٢٦٧٠
جـ ١,٢٥ ، ٠,٦٥٢٤ د ١,٨٣ ، ٠,٩٦٦٤
هـ ٢,٦٧ ، ٠,٩١٥٤ و -١,٣ ، ٠,٦٧٦٦

(٤) أ σ = ٨ ب σ = ٧,٥ جـ μ = ٤٠
د μ = ٦٠ هـ μ = ٥٠ و ٠,٥٨
ز ك = ٣٨ ح ك = ٨٠ ط ك = ٥٢

(٥) أ ك = ١٣٧,٥ ب μ = ٤٥
جـ أولًا: ك = ١٠,٥ ثانيًا: ٠,٨٤١٣
د ٠,٢٩٠٢
هـ أولًا: ١,٩١ ثانيًا: ك = ١,٦٥
و أولًا: ٠,١١٥١ ثانيًا: ٠,٥٤٠٣
ز أولًا: ٠,٠٤٤٦ ثانيًا: ٠,٨١٨٥
ح أولًا: ٠,٨٢٧٤ ثانيًا: ٥٢,٥
ط أولًا: ٠,٦٢٤٧ ثانيًا: ٠,٨٤١٣
ى أولًا: ٠,٠٤٠١ ثانيًا: ٠,٦١٤٧
ك أولًا: ٠,١٠٥٦ ثانيًا: ١٠,٥

اجابة تمارين (٤-٢)

(١) ٠,٦٢٤٧ ، ٨٤١ أسرة (٢) ٤٩,٦٧٪ ، ١٥٩ طالب
(٣) ٦٢ تلميذًا. (٤) ١٥٤٧ طالب
(٥) أ ٢٠ أسرة ب ٤٦٥ جنيها
(٦) أ ٠,١٠٥٦ ب ١٧٩ أسرة
(٧) ٠,٩٥٢٥ (٨) ٤٤٢ عامل
(٩) أ ٠,٨٤١٣ ب ٠,٠٩٢٨
(١٠) أ ٠,٦٤٥١ ب ٠,٢١١٩
جـ ٠,٢٣٨٢
(١١) أ ٩٧٧ شاب ب ٦٧ شاب
(١٢) ١٦
(١٣) أ σ = ١١,٣٦ ب ٥٨٧ طالب
(١٤) أ ٤٩,٦٧٪ ب ١٥٩ طالب
(١٥) σ = ١٢,٥ (١٦) ٥ طلاب
(١٧) ٩٧١ اسطوانة (١٨) ٠,٨٤١٧
(١٩) μ = ١٧٠
(٢٠) أ ٠,٨٤١٣ ب ٠,٩٥٤٤
(٢١) μ = ٥٠
(٢٢) أ ٠,٥٣٢٨ ب ٠,٥٩٨٧
(٢٣) أ ٠,٩٨٣٥ ب ٠,١٩٤٩

اجابة تمارين عامة على الوحدة الرابعة

(١) ٠,٠٢٢٨ (٢) μ = ٧٧,٦

(٣) σ = ٧,٥

(٤) أ ٠,٧٧٣٤ ب ٠,٨٠١٢ جـ ٠,٩٣٣٢

(٥) μ = ١٦ ، σ = ٤

(٦) أ ٠,٩٥٤٤ ب ٠,١٥٣٥

(٧) أ μ = ٢٥ ب μ = ٢٠ جـ σ = ١٠

(٨) أ ٠,٠٢٢٨ ب ك = ٤٠

(٩) أ أ = ٩٩,٣٦ ب ٠,٠٠٦٢

جـ ٠,٠٢٢٨ د ٠,٧٨٨٨

(١٠) أ μ = ٤٨ ب ٠,٤٠١٣

(١١) أ ١,٢٥ ب ١,٢٢

(١٢) أ ٠,٥ ب ٠,٥ جـ ٠,٦٨٢٦ د ٠,٠٢٢٨

هـ ٠,٨١٨٥ و ٠,٣٨٣٠

(١٣) أ أ = ٠,٩٣ ب أ = ١,٤٨

(١٤) ك = ٩٠,٦

(١٥) أ μ = ٥٥ ب μ = ٣٧,٥

(١٦) ٠,٣١٥٣

(١٧) أ ٠,٠٢٢٨ ب ٨٩,٤٤٪

جـ ١٨٧ عامل

(١٨) أ ١٥٤ عامل ب ٢٠ عامل

(١٩) أ ٠,٨٤١٣ ب ٩٥,٤٤٪

حل أختبار تراكمى الوحدة

(١) أولًا: أ $\frac{٢}{٣}$ ب $\frac{١}{٣}$

ثانيًا: نعم لأن تقاطعهم هو ϕ

(٢) أ $\frac{١}{٦}$ ب $\frac{١}{٢}$

(٣) أ ٠,٨

ب ص = ٠,٠٤٢٨٥٧١ س + ٨,٥٧١٤٣٥

جـ ص = ٩٤,٢٩

(٤) أ ك = ١ ب ٢$\frac{١}{٩}$ جـ $\frac{٤}{٩}$

(٥) أولًا: أ $\frac{١}{٦}$ ب $\frac{٢}{٣}$ ثانيًا: $\frac{١}{١٢}$

(٦) ١٧٠ سم

(٧) ٠,٥٢٨٥٧ طردى

الجزء الثانى

الإقتصـــــــــــاد

لجنة تعديل وتعميق البعد الافريقي

م	الاسم	الجهة
١	أ . د / حمدنا الله مصطفي حسن	كلية الآداب جامعة عين شمس (تاريخ حديث ومعاصر)
٢	أ . د / عزيزة بدر	معهد البحوث الافريقية / جامعة القاهرة (جغرافيا)
٣	د / سالي محمد فريد	معهد البحوث والدراسات الافريقية (اقتصاد افريقي وتنمية)
٤	د / محمود محمد إبراهيم عطية	مدير عام تنمية مادة الدراسات الاجتماعية بديوان عام الوزارة
٥	د / ثناء أحمد جمعة	رئيس قسم الدراسات الاجتماعية بمركز تطوير المناهج
٦	د / ميرفت عبد النبي سيد	خبير بمركز تطوير المناهج والمواد التعليمية

مقدمة الاقتصاد

عزيزى الطالب

بين يديك مادة الاقتصاد التى تقدم إليك صورة مبسطة عن علم الاقتصاد وتطوره ودوره فى حياتنا حتى يمكنك مواكبة التطورات الاقتصادية من حولك ، وفهم كل جديد فى عالم الاقتصاد ، لتستطيع التعايش والتعامل مع كل ما يتعلق بالقضايا الاقتصادية .

ففى هذا الكتاب سوف يناقش الموضوعات التالية

- فى الفصل الأول وعنوانه « الاقتصاد والمشكلة الاقتصادية »

يشرح مبررات دراسة علم الاقتصاد موضحًا مدى أهمية توافر المعلومات كعنصر مساعد فى حل المشكلة الاقتصادية ، وكذلك سيناقش مجالات علم الاقتصاد

- فى الفصل الثاني وعنوانه « عناصر الإنتاج »

يفرق بين عناصر الإنتاج المختلفة موضحًا خصائص كل منهم .

- فى الفصل الثالث وعنوانه « الدخل القومى »

يتعرف على مفهوم الدخل القومى والفرق بينه وبين مفهوم الناتج القومى ، وعلاقتهما بمستوى التقدم الاقتصادى للدول .

- فى الفصل الرابع وعنوانه « المالية العامة ودور الدولة »

يتتبع دور الدولة فى النشاط الاقتصادى بمجالاته الثلاث ، وكذا أهم المبادئ القانونية والعامة لتحقيق كفاءة السياسة الضريبية وانعكاسات ذلك على الإيرادات العامة ، ويستعرض أيضا ملامح التطوير التى لحقت بمبدأ توازن الموازنة العامة فى الفكر الحديث .

- فى الفصل الخامس وعنوانه « النقود والبنوك »

يوضح الظروف التى أدت إلى نشأة النقود ، ومراحل تطورها ، كما يوضح أيضا الفرق بين النقود الائتمانية والنقود الورقية ، ودور البنك المركزى فى إصدارها ، كما يعرض تطور وسائل الدفع الإلكترونية والنقود الرقمية .

وأخيرا فى الفصل السادس وعنوانه « العلاقات الاقتصادية الدولية »

يحدد خصائص التجارة الدولية التى تميزها عن التجارة الداخلية ، خاصة فى ظل التغيرات الاقتصادية المصاحبة لعملية العولمة ، وأثر ذلك على ميزان المدفوعات لكل دولة .

وأخيرا نتمنى عزيزى الطالب أن تستفيد من ما بين يديك لتسهم به فى نهضة وتنمية مجتمعك

المؤلف والمراجع

ولجنة التعديل

ومركز تطوير المناهج والمواد التعليمية

الفصل الأول

الاقتصاد والمشكلة الاقتصادية

الأهداف

يصبح الطالب فى نهاية دراسته لهذا الفصل قادرًا على أن :

١. يناقش مبررات دراسة علم الاقتصاد على مستوى الدولة والأفراد.

٢. يحدد الخصائص الأساسية للحاجات الإنسانية .

٣. يضع تعريفًا لمفهوم الموارد الاقتصادية

٤. يفسر اهتمام علم الاقتصاد بدراسة الموارد النادرة دون غيرها من الموارد الأخرى .

٥. يوضح مدى أهمية توافر المعلومات كعنصر مساعد فى حل المشكلة الاقتصادية .

٦. يوضح مفهوم المشكلة الاقتصادية فى ضوء عنصرى الندرة والاختيار .

٧. يشرح علاقة الاقتصاد بمشكلة الاختيار .

٨. يوضح مدى ارتباط مفهوم الاختيار بمفهوم التضحية ، ومكانة مفهوم التضحية بالنسبة لعلم الاقتصاد .

٩. يحدد مجالات علم الاقتصاد .

١٠. يضع تعريفا لعلم الاقتصاد .

- **تمهيد**

إننا نعيش فى عصر تحتل فيه المشكلة الاقتصادية سواء بالنسبة للدول النامية التى تنتمى إليها أو بالنسبة للدول المتقدمة مكان الصدارة فى اهتمامات الرأى العام ، وفى مثل هذه الظروف تعتبر المعرفة بأساسيات علم الاقتصاد ضرورة حيوية لكل مواطن ؛ حتى يستطيع أن يتابع الأحداث والتطورات العامة ويشارك فيها مشاركة فعالة .

ورغم أن المشكلة الاقتصادية قديمة قدم العالم ، فإن ظهور علم الاقتصاد هو أمر حديث نسبيا .

والاقتصاد هو فرع من المعرفة العلمية ، التى تبحث بشكل منظم فى كيفية مواجهة هذه المشكلة الاقتصادية .

وإذا كان من الطبيعى أن نبدأ دراسة الموضوع ببدايته الطبيعية ألا وهى تعريفه ، فإن ذلك لن يكون متيسرا قبل أن نحيط بطبيعة المشكلة الاقتصادية ذاتها ، ويتطلب هذا أن نتعرض لموضوعي الحاجات والموارد.

الحاجات

- **التعريف**

الحاجة هى شعور بالحرمان يلح على الفرد ، مما يدفعه إلى القيام بما يساعده على القضاء على هذا الشعور ، ومن ثم يؤدى لإشباع حاجاته .

- **أنواع الحاجات**

يمكن تقسيم الحاجات حسب أهميتها لحفظ الحياة إلى :

١. حاجات أولية : وهى الحاجات الضرورية لحفظ وجود الإنسان مثل المأكل ، الملبس ، المسكن .

٢. حاجات ثانوية : وهى حاجات نفسية واجتماعية متعلقة بالوسط الحضارى الذى يعيش فيه الإنسان وقد تكون فردية أو جماعية مثل (الصحة ، التعليم ، الأمن ، العدالة) .

- **خصائص الحاجات**

١. الإشباع، تتسم الحاجات بأنها قابلة للإشباع ، أى أن الإنسان يستطيع إشباع حاجاته بمجرد استخدام الوسائل المناسبة بما يؤدى تدريجيا إلى تناقص الشعور بالحرمان وهذا الأمر يمثل ظاهرة « تناقص المنفعة الحدية وهى تعنى « تناقص الشعور بالحرمان مع زيادة الوحدات المستخدمة من الوسيلة المناسبة لإشباع الحاجات .

مثال الكوب الأول من الماء يحقق إشباعًا يفوق بكثير الأكواب التالية للصائم والظمآن

٢. الزيادة المستمرة:حاجات الفرد وتكون قابلة للزيادة المستمرة ، حيث إن هناك دائما حاجات جديدة له فكلما نجح فى إشباع عدد معين من الحاجات ظهرت حاجات جديدة .

٣. التنوع : تتطور حاجات الإنسان بصورة مستمرة ويرجع ذلك إلى أن كل مرحلة عمرية لها احتياجاتها ، وكل وسط حضارى له احتياجاته فحاجات الإنسان فى الريف تختلف عنها فى المدينة ، كما أن العادات والتقاليد تلعب دورًا فى تحديد الحاجات .

٤. التجدد : تتجدد وتتعدد حاجات الإنسان دائمًا ، فكلما أشبع حاجه معينة تولدت مكانها حاجات أخرى فحاجات الإنسان تتجدد بعد إشباعها .

مثال : الجائع يستطيع أن يشبع حاجته بمجرد تناول الطعام ولكن سرعان ما يشعر بالجوع مرة أخرى .

الحاجات البشرية على النحو المتقدم هى المحرك الأساسى لكل النشاط الاقتصادى فالهدف النهائى للنشاط الاقتصادى هو إشباع الحاجات الإنسانية ، على أن ذلك لا يعنى أن كل الحاجات لها التأثير نفسه على النشاط الاقتصادى ، فليست حاجات كل فرد متساوية فى التأثير على الحياة الاقتصادية .

الموارد

- **التعريف**

الموارد هى كل ما يصلح لإشباع الحاجات البشرية بطريق مباشر أو غير مباشر .

والموارد بهذا الشكل متعددة ومتنوعة فالهواء مورد لأنه يشبع حاجة الفرد إلى التنفس ، والشمس كذلك مورد لأن أشعتها وحرارتها ضرورية للحياة بصفة عامة ، كذلك فإن الأرض الزراعية وما تنبته تعد من الموارد ، لأنها تشبع حاجة الفرد إلى الغذاء وأحيانا إلى الكساء وهكذا تتعدد الموارد ، والآن سنتعرف على أنواع الموارد

- **أنواع الموارد**

أولا : يمكن تقسيم الموارد من حيث خصائصها :

أ- من حيث تجددها :

١. **متجددة :** وهى تلك الموارد التى لديها القدرة على التجدد للمحافظة على نوعها ، أى إنها تزيد زيادة طبيعية ، ولكنها تحتاج لتنظيم استخدامها حتى يستمر الانتفاع بها ، فمثلًا الأشجار تنمو وتثمر وتخرج البذور التى تسقط على الأرض فتنبت شجرة من جديد .

٢. **فانية :** أى منتهية مثل الموارد الموجودة فى باطن الأرض ، فهى موجودة بكميات معينة وأنها تقل مع استمرار السحب منها مثل المعادن والبترول .

ب – من حيث ندرتها

١. **موارد اقتصادية** ويقصد بها تلك الموارد الموجودة بكمية أقل مما يشبع الحاجات ولها وحدها قيمة اقتصادية ، وهى التى يهتم بها علم الاقتصاد .

وهنا يجب الإشارة إلى الندرة النسبية تعنى أن المورد يوجد بكمية أقل مما يشبع كل الحاجات التى تصلح لإشباعها وأن اختلفت من فرد إلى أخرى ومن مجتمع إلى أخر ومن فترة إلى آخرى .

٢. **موارد حرة :** ويقصد بها تلك الموارد الموجودة بكميات غير محدودة ، أي أنها موجودة بكمية أكبر مما يشبع كل الحاجات التى تصلح لإشباعها .

ثانيا : يمكن تقسيم الموارد من حيث طبيعتها إلي :

أ- موارد طبيعية : ويقصد بها الأشياء والتى ليس للإنسان دخل مباشر فيها ، لأنها من صنع الله وحده ، ويكون لها تأثير مباشر على الثروة القومية « الغابات ، التضاريس ، المعادن ، البحار ، الأنهار »

ب – موارد بشرية « العنصر البشرى » : وتتمثل فى المجهود البشرى « فكرى ، يدوى ، خدمى » ، الذى تبذله القوى

البشرية المتاحة فى العملية الإنتاجية من جانب الأفراد « المعلم الطبيب الضابط إلخ » .

جـ - موارد مصنعة « رأس المال » : تلك الموارد الناتجة عن تفاعل الإنسان مع الطبيعة ، وتعرف برأس المال المادى مثل الموارد الطبيعية المستخرجه من الأرض بعد معالجتها صناعيًا وتحويلها إلى معدات وآلآت إنتاجية كالحديد والألمونيوم وكذلك المنتجات الأولية الزراعية التى تدخل فى بعض الصناعات « كالقمح والقطن والصوف »

وبعد أن تعرفت عزيزى الطالب على كل من الحاجات والموارد ، سنتعرف على السلع .

السلع : هى الوسائل التى تصلح لاشباع الحاجات بطريق مباشر أو غير مباشر وتنقسم الى:

أ – سلع إستهلاكية . ب– سلع إنتاجية .

أ – سلع إستهلاكية : وهى تصلح لإشباع الحاجات بطريقة مباشرة

أمثلة الحذاء ، وجبة الغذاء ، إلخ .

ب – سلع إنتاجية : وهى تصلح لإشباع الحاجات بطريقة غير مباشرة ، سواء بالمساعدة فى إنتاج السلع التى تصلح لذلك أو بعد إجراء عدة عمليات عليها لكى تصبح صالحة للإستخدام .

أمثلة الجلد المستخدم فى تصنيع الحذاء ، الآلات ، المعدات ، إلخ »

ملاحظة هامة تصنف السلع إلى إستهلاكية أو إنتاجية بالرجوع إلى طريقة الاستخدام التى خصصت لها ، وليست خصائص السلعة ذاتها .

- **أهمية المعلومات**

كما ذكرنا سالفًا تتمثل المشكلة الاقتصادية فى وجود حاجات عديدة وموارد محدودة ، كلما زاد حجم المعلومات المتاحة عند اتخاذ القرارات الاقتصادية عن الحاجات القابلة للإشباع والموارد المتاحة ، فترتب على ذلك ما يلى :–

أ – زيادة قدرة النظام الإقتصادى على حل المشكلة الاقتصادية .

ب – الاستخدام الأمثل لكل الموارد والإمكانيات والكفاءات المتاحة وتقليل الهدر إلى صفر .

ج - تتحدد كفاءة النظام بقدرتة علي توفير أكبر قدر من المعلومات المناسبه عند إتخاذ القرار الإقتصادي .

- **المشكلة الإقتصادية مشكلة عامة (الندرة و الإختيار) :**

ووجود موارد نادره أدى إلى ظهور المشكلة الاقتصادية والتى تنتج عن تعدد الأهداف وندرة الموارد ، وهنا تظهر مشكلة الندرة والاختيار أو تكلفة الفرصة الضائعة أى أن اختيار هدف يعنى التضحية بالأهداف الآخرى التى كان يمكن إشباعها بالوسائل نفسها .

مثال قطعة أرض فضاء إذا أقمنا عليها منزل نضحى بإقامة مدرسة أو مصنع .. وهكذا

- **مجالات الاقتصاد**

لعلم الاقتصاد أربعة مجالات :

١. الاقتصاد الكلى أو التجميعى : والذى يتناول المستويات العامة للنشاط الاقتصادى .

٢. الاقتصاد الجزئى أو الوحدى : والذى يتناول سلوك الوحدات الاقتصادية كمستهلكين أو منتجين (العرض و الطلب)

٣. اقتصاديات الرفاهية : والذى يتناول تقييم السلوك الاقتصادى فى ضوء تحقيق معايير الكفاءة .

٤. اقتصاديات النمو والتنمية : والذى ينظر إلى المستقبل وما نعده له من إمكانيات للنمو والتنمية .

- **تعريف علم الاقتصاد**

هو علم اجتماعى يدرس المشكلة الاقتصادية المتمثلة فى الندرة النسبية للموارد القابلة لإشباع الحاجات المتعددة للإنسان ، وكيفية استخدام هذه الموارد المحدودة على أفضل نحو مستطاع ، حتى يمكن الوصول إلى أقصى إشباع ممكن لتلك الحاجات .

أسئلة الفصل الأول

١- أى العبارات الأتية صحيح وأيها غير صحيح مع ذكر السبب فى الحالتين :

أ. تتناقص المنفعة الحدية تدريجيًا مع تناقص الوحدات المستخدمة .

ب . قد تكون السلعة إنتاجية أو استهلاكية على حسب الغرض المخصص لها .

٢- ما المقصود بالمفاهيم الاقتصادية التالية :

أ . الحاجات .

ب . الموارد .

جـ . علم الاقتصاد.

٣- بم تفسر ؟

أ . الحاجات البشرية هى المحرك الأساسى لكل نشاط اقتصادى .

ب . الأهمية الاقتصادية للمعلومات .

جـ . المشكلة الاقتصادية مشكلة ندرة واختيار .

٤- تخير الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

أ – يطلق على الموارد النادرة اسم الموارد ......

« الحرة – الاقتصادية – الاستهلاكية – الإنتاجية »

ب – يهتم علم الاقتصاد بالموارد الأكثر ......

« ندرة – أهمية – ضرورة – إشباعا »

جـ – تتمثل المشكلة الاقتصادية فى .....

« ارتفاع الأسعار – وفرة المعلومات – انخفاض الاسعار – ندرة الموارد بالنسبة للحاجات »

د – تتمثل خصائص الحاجات فى الآتى عدا ....

« الإشباع – التنوع – الثبات – التطور »

الفصل الثانى

عناصر الإنتاج

الأهداف

يصبح الطالب فى نهاية دراسته لهذا الفصل قادرًا على أن :

١. يذكر خصائص العمل كعنصر من عناصر الإنتاج .

٢. يحدد الخصائص المميزة لكل من الطبيعة ورأس المال .

٣. يضع تبريرا لخضوع عنصر الطبيعة لمجموعة من الحقوق ، على الرغم من كونها هبة من الله .

٤. يضع تعريف لرأس المال باعتباره عنصرًا من عناصر الإنتاج .

٥. يفرق بين رأس المال الثابت ورأس المال المتداول .

٦. يوضح المقصود باستهلاك رأس المال ويحدد أنواع هذا الإستهلاك .

تمهيد

المقصود بالإنتاج

رأينا فيما سبق كيف أن إشباع الحاجات يقتضى القيام بالإنتاج ، فلكى يقوم الفلاح بإنتاج القمح عليه أن يبذل جهدًا فى بذر البذور والقيام بالعمليات الزراعية المختلفة من حرث ورى وحصاد ... إلخ ، ولا بد من وجود تربة صالحة للزراعة ، ومن توافر كميات مناسبة من المياه ، وكذلك قد يحتاج الأمر إلى بعض أنواع المخصبات والمبيدات الكيماوية ، وعادة لا يبذل الفلاح جهدا مستقلًا إذ قد يستعين بطاقات الحيوان فى الجر والحرث ، وربما ببعض الطاقات الميكانيكية مثل قوة البترول أو الكهرباء فيما يستخدم من آلات لرفع المياه أو لرش المبيدات .

- **أقسام عناصر الإنتاج**

يتم تقسيم عناصر الإنتاج إلى مجموعتين أو ثلاث مجموعات كبيرة ، فهناك الموارد البشرية ، وهناك الموارد الطبيعية ، وهناك الموارد المصنوعة ، وهذا التقسيم يتفق مع التقسيم التقليدى لعناصر الإنتاج إلى العمل ، والأرض ، ورأس المال ، ويفضل بعض الاقتصاديين المحدثين تقسيم عناصر الإنتاج إلى مجموعتين فقط العمل ورأس المال ، لأن الاتجاه المعاصر يرى الطبيعة غير متميزة عن رأس المال .

ويلاحظ أنه لا جدال فى أن العمل هو العنصر الإيجابى فى عملية الإنتاج ، فالاقتصاد شأنه شأن كل العلوم ، لم يقم إلا بالإنسان وللإنسان .

أولا : العمل

- **ماهية العمل**

العمل عنصر من عناصر الإنتاج فهو الجهد الإنسانى المبذول من خلال العملية الإنتاجية بقصد إنتاج السلع والخدمات .

وهنا لا يجب النظر إلى إدارة عنصر العمل كمورد اقتصادى عادى ولكنه عنصر إنسانى و لذلك يجب مراعاة هذا الإعتبار الإنساني من حيث تنظيم ساعات العمل والإجازات والأجر الذى يحصل عليه العامل لأنه لا يكون فى مقابل جهده فقط وإنما دخل يحدد مستوى معيشته أيضًا .

- **خصائص العمل**

يتميز العمل كعنصر من عناصر الإنتاج بالآتى .

١. نشاط واع وإرادى .

أ – نشاط واع : الإنسان يعيش فى الطبيعة فهو وحده الذى يعيها ويستوعبها ويحولها ويغيرها ويطورها .

ب – نشاط إرادى : فإنه يفترض أن الإنسان يقوم بالحساب الاقتصادى ويقارن بين العائد الذى يعود عليه من بذل هذا النشاط والتكلفة التى يتحملها .

٢. العمل مؤلم بطبيعته

يمكن النظر إلى الآلم الذى يصاحب العمل باعتباره التكلفة والتضحية التى يتحملها من يقوم بالعمل ، ويكون هذا الآلم ناتج عن الإرهاق البدنى أو العصبى ولكن العمل هو مصدر المتعة والسعادة أيضا ، فعندما يرى العامل نجاحه وما ينجزه تتحقق السعادة والرضا .

١. مجهود غائى

يهدف إلى المشاركة فى إنتاج السلع والخدمات ، وإذا كان الجهد الذى يبذله الإنسان لا يهدف إلى الإنتاج فإنه لا يعتبر عملًا بالمعنى الاقتصادى .

- **أنواع العمل**

يختلف العمل المبذول من مهنة إلى أخري ، ويتم التقسيم طبقًا للصفة الغالبة على نوع العمل فيمكن تقسيمه إلى أعمال يدوية « عضلية » تعتمد على الجهد العضلي ، وأعمال ذهنية تستند إلى المعرفة ، وفى الواقع لا يوجد عمل يدوى يعتمد فقط على الجهد العضلى دون استخدام الملكات الذهنية ، وبالمثل لا يوجد عمل ذهنى تماما لا يتطلب أى جهد بدنى

ثانيا : الطبيعة

العنصر الثانى من عناصر الإنتاج ، وهى تعنى كل الموارد والقوى التى يجدها الإنسان دون جهد من جانبه وهى هبة من صنع الله كما أنها محدودة الكمية من أمثلتها الأرض ، المناجم ، الغابات ، مساقط المياه ، إلخ

تؤثر الموارد الطبيعية تأثيرا كبيرا فى النشاط الاقتصادي ، فوجود مناجم وأراضى وغير ذلك يؤثر على طبيعة النشاط الاقتصادى ، ومن هنا دخل بعد المكان إلى دراسة الاقتصاد ، وهذا لا يعنى أن هناك حتمية جغرافية لا مفر منها لأن الإنسان استطاع التغلب على قيود الموقع أو المكان من خلال التجارة الدولية .

- **خصائص الموارد الطبيعية**

١. خاضعة للحقوق القانونية : يهتم علم الاقتصاد بالموارد النادرة ، وهذا الأمر يعنى اختيار لبعض الأهداف والتضحية بأهداف أخرى كان ممكن تحقيقها باستخدام نفس الوسيلة ، وهذا الأمر يستلزم الاعتراف بوجود سلطة على هذه الموارد تسمح باختيار الهدف الأمثل ، وهذا يتطلب الإعتراف بوجود سلطه وهى فكرة الحق .

٢. هبة من الله : رغم أن الطبيعة هبة من الله فإنها معطاءة وغير منتجة ، ونادرًا ما تستخدم بصورتها الأولية ، بل لا بد من تدخل الإنسان لذلك تكاد تكون مصنوعة .

٣. غير قابلة للهلاك : رغم أن الطبيعة غير قابلة للهلاك إلا أن الإنسان أساء استغلالها بشكل جعلها أقل صلاحية لإشباع حاجاته .

وبذلك نجد أن الصفتان لا تتحققان بشكل كامل ، فالأمر يحتاج لمزيد من التروى .

- **الموارد الحرة والحفاظ على البيئة**

يعتبر الهواء ومياه البحر من الموارد الحرة ، أى لا تخضع لأى سيطرة وليس هناك حدود لاستخدامها ، ولكن من زاويا معينة تكاد تكون هذه الموارد نادرة أيضا ، فإذا نظرنا إلى مدى التلوث الذى يلحق بالهواء ومياه البحر لأدركنا أننا نعبث بموارد متاحة ، ومن هنا فيجب على الحكومات فرض القيود اللازمة للحفاظ على البيئة .

ثالثا : رأس المال .

وهو العنصر الثالث من عناصر الإنتاج ، وهو مجموعة غير متجانسة من الآلات والأدوات والأجهزة المصنوعة ، التى تساعد عند استخدامها فى عملية الإنتاج على زيادة إنتاجية العمل وخلق مزيد من السلع والخدمات .. فقد اكتشف

الإنسان منذ وقت بعيد جدوى الإنتاج غير المباشر ، بأن يقوم أولا بصنع بعض الأدوات والآلات التى يستخدمها بعد ذلك فى الإنتاج بما يحقق الإنتاج بكفاءة أكبر . وهكذا ظهر رأس المال كعنصر من عناصر الإنتاج فى شكل الأدوات والآلات التى يستخدمها الإنسان فى الإنتاج .

- **أنواع رأس المال :**

يمكن تقسيم رأس المال كعنصر من عناصر الإنتاج إلى : -

١. رأس المال الثابت وهو الذى يمكن استخدامه مرات عديدة فى الإنتاج ، دون أن يفقد خصائصه الأساسية ، ومن أمثلة رأس المال : الآلات وأدوات العمل والتجهيزات الفنية والإنشاءات ، ويطلق عليها أحيانا الأصول الإنتاجية .

٢. رأس المال المتداول : وهو الذى يستخدم مرة واحدة فى عملية الإنتاج يفقد بعدها شكله الأول ويختفى فى نهاية الأمر فى السلعة المنتجة كجزء منها . ومن أمثلتة المواد الأولية والوسيطة والوقود ، ويطلق عليها أحيانا (رأس المال الجارى) .

- **خصائص رأس المال :**

١. عنصر صنعه الإنسان : حيث يعتمد تكوين رأس المال على الادخار (وهو التضحية بجزء من الاستهلاك فى الوقت الحاضر) وتنقسم الدول من حيث قدرتها على الإدخار إلى نوعين متقدمة لديها قدرة كبيرة على الادخار وبالتالى كم كبير من رأس المال وإنتاجية عالية على عكس الدول النامية .

٢. قابل للهلاك : ومن ثم ينبغى تجديده حيث يتعرض رأس المال الثابت لنوعين من الاستهلاك هما :

أ – الاستهلاك المادى : حيث ان استخدام رأس المال فى الإنتاج يؤدى إلى إهلاكه ماديا

مثال : آلات يصبها التلف والتآكل بمرور الزمن ونتيجة لكثرة الاستخدام .

ب – الاستهلاك الاقتصادى : يرجع إلى ما يحدثه التقدم الفنى وتغير الأذواق من فقد رأس المال لقدرته الإنتاجية بكفاءة .

مثال : ظهور آلات وأجهزة جديدة قادرة على الإنتاج بتكاليف أقل ، أو نتيجة لتغير الأذواق وتقلص الطلب على السلعة .

ملاحظات هامة :

١- يثير استهلاك رأس المال بنوعية مشاكل محاسبية عديدة ، وينبغى على أى نظام اقتصادى ناجح أن يعمد إلى الاحتفاظ بقيمة رأس المال المتاح لديه ، عن طريق تعويض استهلاك رأس المال بنوعية بشكل مستمر .

٢- تنطوى التنمية الاقتصادية إلى حد بعيد على العمل على زيادة حجم رأس المال المتاح للاقتصاد القومي ، حيث لا تتوقف التنمية الاقتصادية على حجم رأس المال فقط بل تعتمد وبدرجة كبيرة على مدى تطور العنصر البشري .

اسئلة الفصل الثانى

١- ضع علامة (✓) أو علامة (×) مع ذكر السبب فى الحالتين :

أ- يعتبر رأس المال مجموعة غير متجانسة من الآلات والأدوات .

ب- يمثل رأس المال عنصرا قابلا للدوام .

ج – العمل هو العنصر الإيجابى فى العملية الإنتاجية .

د – تمثل الطبيعة عنصرًا دائمًا ولكنها محدود الكمية .

٢- قارن بين :

أ – خصائص الطبيعة وخصائص رأس المال .

ب – رأس المال الثابت ورأس المال المتداول .

٣- أكتب المفهوم أو المصطلح الاقتصادى الذى تشير إليه كل عبارة من العبارات التالية :

أ – مجهود غائى يهدف إلى خلق المنافع بالإسهام فى إنتاج السلع والخدمات .

ب – كل الموارد والقوى التى يجدها الإنسان دون جهد من جانبه .

٤- ما النتائج المترتبة على ... ؟

أ – الاستغلال السيء للطبيعة .

ب – استهلاك رأس المال الثابت .

٥- ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من (أ – ب – جـ - د) لكل مما يلى :

(١) أى من العناصر الأتية يمثل عنصر العمل من الناحية الاقتصادية :

أ – عزف الموسيقى لإشباع هوايته .

ب – علاج الطبيب لمرضاه .

ج- قيادة السيارة للتنزه .

د – قضاء وقت فى لعب الشطرنج .

(٢) أى من العناصر الآتية يمثل استهلاكًا اقتصاديًا لرأس المال :

أ – انتهاء العمر الافتراضى لآلة ما .

ب – الاستفادة من إمكانات الآلة فى زيادة الإنتاج .

ج – عدم صلاحية الآلة بظهور الآلات الحديثة تكنولوجيا .

د – زيادة المنفعة الاقتصادية لعناصر الإنتاج .

الفصل الثالث

الدخل القومى

الأهداف

يصبح الطالب فى نهاية دراسته لهذا الفصل قادرا على أن :

١. يعرف كل من (الدخل القومى – الدخل القومى النقدى – الدخل القومى الحقيقى – الناتج القومى – الإنفاق القومى – الاستهلاك – الادخار – الاستثمار) .

٢. يبدى رأيه فى العبارة القائلة بأن (العبرة بالدخل الحقيقى لان الدخل النقدى يمكن أن يكون مضللًا) .

٣. يحدد موارد الدخل القومى .

٤. يناقش طرق قياس الدخل القومى .

٥. يحدد مدى صحة العبارة القائلة بأن (الدخل القومى هو الوجه المقابل للناتج القومى) .

٦. يبين العلاقة بين الإدخار و الاستهلاك .

٧. يحدد المقصود بالعبارة القائلة بأن (مستوى تقدم الدول يقاس أحيانا بمتوسط الدخل) .

تمهيد :

يهدف النشاط الاقتصادى إلى إشباع حاجات الأفراد غير المحدودة باستخدام الموارد النادرة المتاحة لهم فى ظل ما هو متوافر من معرفة ومعلومات ، ويتم ذلك عن طريق النشاط الإنتاجى الذى يؤدى إلى ظهور الإنتاج القومى .

ومع ذلك فإن الفهم الكامل لعمل الاقتصاد القومى يتطلب الإحاطة بعدد من المفاهيم الأساسية إلى جانب الإنتاج القومى وبصفة خاصة مفهوم الناتج القومى ومفهوم الدخل القومى والاستهلاك والادخار والاستثمار والإنفاق القومى .

• الدخل القومى

يمكن تعريفه بأنه (مجموع الدخول المكتسبة لجميع أفراد المجتمع ومشروعاته خلال سنة مقابل إسهامهم فى العملية الإنتاجية وينقسم (الدخل القومى) إلى نوعين هما : -

١. الدخل القومى النقدى : ويقصد به كمية النقود التى يحصل عليها أفراد المجتمع من عوائد عوامل الإنتاج مقابل مشاركتهم فى العملية الإنتاجية خلال فترة زمنية معينة وهى غالبا سنة .
٢. الدخل القومى الحقيقى : وهو يمثل مقدار ما يحصل عليه أفراد المجتمع من السلع والخدمات فى مقابل الدخل النقدى ، وهمزة الوصل بين الدخل النقدى والحقيقى هى الأسعار ، فارتفاع الاسعار يعنى انخفاض الدخل الحقيقى والعكس صحيح .

إذن ما يحسب فى الدخل القومى هو الدخول الناتجة عن المساهمة فى العملية الإنتاجية ، كما توجد دخول أخرى يحصل عليها الأفراد ولا يترتب عليها المساهمة فى العملية الإنتاجية وتسمى المدفوعات التحويلية .

المدفوعات التحويلية : هى مدفوعات ليست مقابل خدمات إنتاجية تم تأديتها ، وبالتالى لا تدخل ضمن حساب الدخل القومى ، وسميت مدفوعات تحويلية لأن الدولة حصلتها من الأفراد فى صورة (رسوم - ضرائب - جمارك) ثم حولتها لهم فى صور أخرى مثل (الإعانات الاجتماعية – إعانة البطالة – الهبات – التبرعات) .

• موارد الدخل القومى :

١. الريع : العائد الذى يحصل عليه صاحب الأرض مقابل خدماتها التى تساهم بها فى العملية الإنتاجية .
٢. الفائدة : هى كل ما يدفع لصاحب رأس المال مقابل استخدامه أو استعماله ، وهى واجبة الأداء مهما كانت نتيجة هذا الاستغلال أو الاستعمال من ربح يعود على المستغل لـ (رأس المال) أو خسارة تلحق به ، مثل (الفائدة التى نحصل عليها من استثمار الأموال فى البنوك .)
٣. الأجر : هو الدخل الذى يحصل عليه العامل مقابل عمل يقوم به أو خدمة يؤديها لصاحب العمل ، أى أنه ما يحصل عليها العامل البشرى مقابل مساهمته ومشاركته فى العملية الإنتاجية وقد يسمى راتب أو أتعاب أو ماهية .
٤. الربح : المكافأة التى تمنح للعامل مقابل مساهمته ومشاركته فى العملية الإنتاجية .

• طرق قياس الدخل القومى

يمكن قياس الدخل القومى باستخدام ثلاث طرق :

١. طريقة الناتج القومى
٢. طريقة الأنصبة الموزعة
٣. طريقة الإنفاق القومى

والآن عزيزى الطالب سنتعرف على كل منهم

١. طريقة الناتج القومى

للتعرف على الناتج القومى فلا بد من التعرف على الإنتاج القومى ، فيمكن تعريفه بأنه (مجموع ما أنتج فى الاقتصاد من سلع وخدمات خلال فترة زمنية معينة ، وقد يرتبط الإنتاج بالسلع المادية وغير المادية) .

مثال : أحد المشروعات يقوم بإنتاج الصلب ، ويقوم مشروع آخر بإنتاج السيارات ، فإنه يمكن القول بأن المشروع الأول ينتج ما قيمته كذا من الصلب ، وأن المشروع الثانى ينتج ما قيمته كذا من السيارات . و إذا أردنا معرفة إنتاج المشروعين معا ، فأنه لا يكون حاصل جمع إنتاج المشروعين،والسبب فى ذلك هو أن جزء من الصلب سيحسب مرتين : مرة باعتباره إنتاجا للمشروع الأول ، ومرة باعتباره جزءا من إنتاج المشروع الثاني وهو السيارات (وهو ما يعرف بالإزدواج المحاسبى)

– ولتجنب خطر الازدواج المحاسبى ، ينبغى أن يقدر الإسهام الإنتاجى للاقتصاد القومى وفقًا لما سمى بالقيمة المضافة أو قيمة الإنتاج المضاف .

– وهنا يظهر مفهوم الناتج القومى (الذى يعبر عن مجموع الإسهام الإنتاجى للمشروعات فى اقتصاد معين خلال فترة معينة (سنة فى العادة)

إذن لقياس الإسهام الإنتاجى لأحد المشروعات فى الناتج ، فإنه ينبغى الاقتصار على ما يضيفه هذا المشروع إلى قيمة السلعة التى ينتجها (أى القيمة المضافة)

٢. طريقة الأنصبة الموزعة

تهتم هذه الطريقة بحساب الدخل القومى من حيث توزيعه على عناصر الإنتاج فيتم تقدير الدخل القومى بجمع دخول عناصر الإنتاج المختلفة التى ساهمت فى النشاط الإنتاجى ، وتتمثل هذه الدخول فى دخول العمل و تعنى الأجور والمرتبات والمكافآت ودخول الملكية تتمثل فى الأرباح والفوائد والريع

يجب استبعاد :

أ– المتحصلات الأخرى التى لا ترتبط بالإسهام فى الإنتاج مثل الإعانات الاجتماعية – إعانات البطالة .

ب– الكسب والخسارة والرأسمالية

مثال : قد يبيع أحد الأفراد بعض الأصول (منزل مثلا) بثمن أعلى مما اشتراه به . وهو ينظر إلى الكسب الرأسمالى كنوع من الدخل ، ولكن هذا الإيراد لم ينتج عنه إسهام فى الإنتاج ولذلك لا يدخل فى حساب الدخل القومى .

٣. طريقة الإنفاق القومى

تعتمد هذه الطريقة على احتساب كافة المبالغ التى تم إنفاقها فى المجتمع من قبل الأفراد والمشروعات والهيئات الخاصة والعامة على شراء السلع والخدمات المنتجة فى الاقتصاد خلال فترة معينة (عادة سنة) .

ويمكن تعريف الانفاق القومى بأنه (مجموع ما أنفق خلال فترة معينة على الاستهلاك والاستثمار فى الاقتصاد القومى وذلك خلال فترة زمنية معينة .

عزيزى الطالب سنتعرف على كل من الاستهلاك والاستثمار

١. **الاستهلاك :** يعنى الإنفاق على السلع والخدمات بقصد إشباع الحاجات مباشرة ، وقد يكون الاستهلاك خاص أو عام .

أ – الاستهلاك الخاص : يقصد به الإنفاق على السلع والخدمات بقصد إشباع الحاجات الفردية (شراء المنتجات الغذائية ...)

ب – الاستهلاك العام : يقصد به إنفاق السلطات العامة بقصد إشباع الحاجات الجماعية (التعليم – الصحة .. الخ)

ملاحظة هامة : يواجه الاستهلاك مشكلة قياس الاستهلاك ، لذلك يتم قياس استهلاك السلعة بمجرد شراء الفرد لها .

مثال : السيارة هى من السلع المعمرة ومن يشتريها لم يقصد استهلاكها فى الحال ، ولأسباب عملية بحتة ، يعتبر أن السيارة قد تم استهلاكها بمجرد الشراء .

يتضح لنا مما سبق أن الاستهلاك هو الجزء من الدخل القومي ، الذى ينفق للحصول على السلع الاستهلاكية .. وأما ما يتبقى من الدخل القومى يطلق عليه .. الادخار .

والآن .. نتعرف على الادخار

٢. الادخار

هو عملية سلبية تمثل جزء من الدخل ، لم ينفق للحصول على السلع الاستهلاكية .

إذن الادخار = الدخل القومى - الاستهلاك .

٣. الاستثمار

ويقصد به الإنفاق من أجل الإضافة إلى ثروة البلد الإنتاجية فى الفترات القادمة ، أى الإضافة إلى رصيد المجتمع من الأصول الرأسمالية التى تمكن من زيادة القدرة الإنتاجية مثل (الآلات – المبانى – الخ)

أى أن المجتمع لا يستخدم كامل قدرته الإنتاجية المتاحة لإنتاج سلع وخدمات استهلاكية ، بل يخصص جزء للإضافة لرأس المال الثابت ، والمخزون السلعى ورأس المال المتداول بهدف إنتاج السلع أو الخدمات فى المجتمع .

- **مفهوم متوسط الدخل**

متوسط الدخل : يقصد به ما حصل عليه كل فرد من الدولة من دخل فى المتوسط خلال عام ما ، ويتم تقديره بالمعادلة التالية

$$\text{متوسط الدخل} = \frac{\text{الدخل القومى للدوله فى العام المذكور}}{\text{عدد سكان هذه الدولة فى ذلك العام}}$$

– إذن كلما زاد مقدار الدخل القومى بالنسبة إلى عدد الأفراد فى الدولة زاد متوسط الدخل .

أسئلة الفصل الثالث

١- ضع دائرة حول الحرف الذى يمثل الإجابة الصحيحة فيما يلى :

- أيها أكثر دلالة على مستوى النشاط الاقتصادى ؟

أ- الدخل القومى .

ب – الناتج القومى .

ج – النمو الاقتصادى .

د – الإنتاج القومى .

- يتمثل الفرق بين الإنتاج القومى والناتج القومى فى .....

أ – القيمة المضافة .

ب – متوسط دخل الفرد .

ج – قيمة الاستهلاك .

د – قيمة الاستثمار .

- يتثمل الإنفاق القومى فى مجموع الإنفاق على ....

أ – الاستهلاك .

ب – الاستثمار .

ج – السلع والخدمات .

د – الاستهلاك والاستثمار .

- يتمثل الفرق بين الدخل النقدى والدخل الحقيقى فى التأثر بـ .....

أ – متوسط دخل الفرد .

ب – تغير مستوى الأسعار .

ج – المنفق على السلع الاستثمارية

د – المنفق على الاستهلاك .

٢- أعط مفهوما اقتصاديا لكل عبارة من العبارات الآتية :

أ – مقدار السلع والخدمات التى يمكن الحصول عليها فى السوق مقابل الدخل النقدى .

ب – الإنفاق على السلع والخدمات بقصد إشباع الحاجات مباشرة .

ج – الإنفاق من أجل الإضافة إلى ثروة البلاد الإنتاجية .

٣- قارن بين :

أ – الدخل النقدى والدخل الحقيقى .

ب – الإنتاج القومى والناتج القومى

جـ – دخول الملكية ودخول العمل .

الفصل الرابع

المالية العامة ودور الدولة

الأهداف

يصبح الطالب فى نهاية دراسته لهذا الفصل قادرا على أن :

١. يميز بين الحاجات الفردية و الحاجات العامة و الحاجات الاجتماعية .
٢. يفسر قصور السوق عن توفير الخدمات العامة والاجتماعية .
٣. يشرح المجالات الثلاثة التى توضح دور الدولة فى النشاط الاقتصادى .
٤. يحدد مفهوم الخصخصة وصورها .
٥. يحدد مفهوم النفقات العامة .
٦. يوضح مبدأ أولويات النفقات العامة .
٧. يميز بين الضريبة والرسم .
٨. يحدد المبادئ القانونية والعامة لتحقيق كفاءة السياسة الضريبية .
٩. يحدد مفهوم العدالة الضريبية .
١٠. يحدد مفهوم الموازنة العامة .
١١. يميز بين مبدأ سنوية الموازنة العامة من جهة ، ومبدأ وحدتها من جهة أخرى .
١٢. يبين التطور الذى لحق بمبدأ توازن الموازنة العامة فى العصر الحديث .

تمهيد :

تمثل المالية العامة فرع علم الاقتصاد ، الذى يدرس دور الدولة فى تقديم الخدمات العامة والاجتماعية ، وكيفية تمويل ذلك عن طريق الإيرادات العامة وخاصة الضرائب ، وهكذا تعبر المالية العامة عن التفسير الاقتصادى لدور الدولة فى الحياة العامة ، ونطاق هذا الدور ، والأساليب المستخدمة لتحقيقه .

وتبرز أهمية المالية العامة بوجه خاص فى الدول التى تأخذ بنظام الاقتصاد الرأسمالى (اقتصاد السوق) : وهو يعنى حرية الملكية الخاصة لوسائل الإنتاج ، ويتحكم فى الأسعار العرض والطلب . ففى هذه الأحوال لا يكفى تنظيم السوق لإشباع جميع الحاجات ولا بد من تدخل الدولة لتقديم قدر من الخدمت العامة والاجتماعية التى تعجز السوق عن توفيرها . وبذلك تلح الحاجة لوجود دور للدولة ومجال للمالية العامة إلى جانب السوق .

أما فى الدول التى تأخذ بالنظام الاقتصادى الاشتراكى : ويعنى ملكية الدولة للجزء الأكبر من وسائل الإنتاج والثروة فى المجتمع ، والدولة هى التى تتحكم فى الأسعار بحيث يختفى أو يتضاءل دور السوق ولا يظهر دور الدولة فى إشباع الحاجات العامة متميزا عن دورها بشكل عام فى الحياة الاقتصادية .

- **أنواع الحاجات**

يمكن تقسيم الحاجات من حيث شيوع النفع الى،

١. **حاجات خاصة (فردية)**

- تخضع لمبدأ القصر أو الاستئثار .

- يمكن منع الآخرين من الإستفاده منها .

- مد الخدمة للغير يتطلب أعباء إضافية أو حرمان المستفيد من جزء من الخدمه مثل (المأكل – الملبس – المأوى)

٢. **حاجات عامة وتنقسم إلى ؛**

أ – عامة مطلقة

- يشيع نفعها على الأفراد بمجرد توافرها .

- لا يمكن منع الأخرين من الإستفادة بها .

- مد الخدمة لا يتطلب أعباء إضافية .

مثل (العدالة والأمن)

ب – عامة تخضع لمبدأ القصر

- يمكن منع الأخرين من الاستفادة بها .

- مد الخدمة لا يتطلب أعباء إضافية .

مثل (مد جسر على نهر لمزرعة خاصة) .

٣. **حاجات اجتماعية**

- فى ظاهرها فردية .

- مد الخدمة يتطلب أعباء إضافية .

- تخضع لمبدأ القصر .

- لها نفع يعود على الآخرين ولا يمكن تجاهل أثره .

- مثل (التعليم والصحة)

- **قصور السوق عن توفير الخدمات العامة الاجتماعية**

يقوم نظام السوق فى توفير السلع والخدمات على مبدأ المصلحة الذاتية ولا ينجح فى توفير بعض الخدمات العامة كليا أو جزئيا ، ومن ثم لا بد من توفير هذه الخدمات عن طريق آخر ، وهو طريق الدولة باستخدام أسلوب السلطة أو القهر القانونى

- **قصور نظام السوق عن توفير الخدمات العامة والاجتماعية**

أ – أسباب قصور السوق عن توفير الخدمات العامة

يقصر نظام السوق عن توفير الخدمات العامة للأسباب التالية :

١. لا يوجد بها دافع ذاتى يجعل الأفراد تعلن مسئوليتها عن القيام بها .

٢. طالب الخدمة هو الذى يتحمل تكلفتها .

٣. لا يشاركه أحد فى تحمل نفقاتها .

٤. لا يمكنه منع الآخرين من الاستفادة منها متى توفرت .

٥. يمكنه الاستفادة منها بدون أى تكلفة متى توفرت من غيره .

ولذلك فلا بد من تدخل الدولة باستخدام أسلوب السلطة أو القهر من خلال الضرائب وغيرها من الموارد السيادية

ب – أسباب قصور السوق عن توفير الخدمات الاجتماعية

ملاحظة(رغم وجود دافع ذاتى بها ، إلا أنه ليس بإمكان كل الأفراد القيام بها)

وهكذا يتضح أن السوق لا يصلح وحده لإشباع الحاجات وأنه حتى فى الدول التى تأخذ بنظام السوق .. لا بد من وجود دولة قوية تقدم الخدمات العامة والاجتماعية هو أمر ضرورى ولازم للاقتصاد ، وهذا هو مجال المالية العامة .

- **دور الدولة فى النشاط الاقتصادى :**

إذا كانت فكرة الخدمات العامة والاجتماعية هى الأساس فى دور الدولة فى المجتمع وبالتالى أساس المالية العامة ، فقد يكون من المناسب مع ذلك تحديد المجالات الاقتصادية الأخرى التى تتدخل فيها الدولة .

ولكن ينبغى أن يكون معلوما أن التفسير النهائى لكافة أشكال تدخل الدولة يظل هو فكرة المصلحة العامة بالمعنى الواسع .

- **ونتناول هنا أهم هذه المجالات :**

١. إشباع الحاجات العامة والاجتماعية :

اشرنا إلى دور الدولة فى إشباع الحاجات العامة والاجتماعية ، وعادة تقوم الدولة بتوفير الخدمات العامة ، كما تتدخل للتأكد من إشباع الحاجات الاجتماعية ، وليس من الضررورى أن يكون تدخل الدولة فى إشباع الحاجات الاجتماعية

عن طريق استبعاد السوق كلية والحلول محلها ، بل قد ترى الدولة أن تستمر فى الاعتماد على السوق مع توفير بعض الترتيبات الخاصة المكملة لها ، ولذلك .. فإن تدخل الدولة يأخذ أشكالا مختلفة . فهى قد تنشئ المستشفيات ودور العلاج الحكومية إلى جانب المستشفيات ودور العلاج الخاصة لتطوير الخدمات الصحية . وهى قد تضع أنواعا من التأمين الصحى أو تقدم إعانات للفقراء والمحتاجين من المرضى .

٢. تحقيق الاستقرار والنمور الاقتصادى :

كان الرأى السائد حتى بداية هذا القرن أن النشاط الاقتصادى هو مسئولية الأفراد ، وأن دور الدولة يقتصر على توفير الظروف والأوضاع القانونية والمادية المناسبة لكى يقوم الأفراد بنشاطهم الاقتصادى فى حرية كاملة . ومع ذلك فإنه نتيجة لما نشأ من تقلبات اقتصادية شديدة أدت إلى مشكلات عديدة مثل البطالة (تعنى عدم وجود فرص عمل لمن يرغب فى العمل وقادر عليه وفى سن العمل) ، ومشكلة التضخم (وهى تعنى ارتفاع ملموس ومستمر عبر الزمن فى الأسعار أى ناتج عن زيادة الطلب عن العرض) .. قد استقر الرأى على أن مسئولية الدولة تتضمن التدخل لتحقيق مستوى معقول من النشاط الاقتصادى وتوفير قدر من الاستقرار فى مستويات الأسعار ، بحيث أصبحت الدولة تتدخل فى النشاط الاقتصادى لتحقيق معدلات من النمو أو توفير الظروف المناسبة للتنمية الاقتصادية . ويتطلب هذا التدخل من الدولة التأثير فى ظروف الاستثمار وفى شروط الائتمان وتوفير العمل واستقرار العملة الوطنية فى مواجهة أسعار العملات الأخرى ، وغير ذلك من مظاهر السياسات الاقتصادية .

٣. تحقيق عدالة التوزيع :

لا يقتصر دور الدولة على توفير السلع والخدمات العامه والاجتماعية فى ظروف مناسبه وتحقيق الاستقرار والنمو الاقتصادي ، بل إ الدولة تتدخل أيضا لتحقيق المزيد من العدالة فى توزيع الدخل القومى بين الافراد.

ويتحقق ذلك عن طريق التاأثير فى توزيع المزايا والأعباء.على المواطنين بشكل يساعد على تقريب الفوارق بين الطبقات ويزيل الإحساس بالظلم بين الأفراد.وبطبيعة الحال..فإن العداله فى التوزيع تراعى فى الوقت نفسه اختلاًف الإسهام فى الإنتاج ودفع عملية النمو.فليس من يعمل كمن لا يعمل..فالعداله فىالتوزيع تقتضى توفير الفرص المتساويه لجميع المواطنين دون تميز.وبحيث لا يضار احد فى قدرته على التقدم والنجاح بسبب راجع إلى الإرث أو النسب أو اللون أو الدين أو غير ذلك من الأسباب ، التى لاتؤدى الى الإسهام فى دفع حركة المجتمع إلى الأمام.

- **الخصخصة :**

يقوم النظام الإقتصادى الرأسمالى السائد عالميا الأن على عدة دعائم رئيسه ، اهمها مايلى :

أولا : بالنسبة لملكيه وسائل الإنتاج فى المجتمع :

تسود الملكيه الخاصة لهذه الوسائل بمعنى أنها تكون غالبيتها مملوكة خاصة لأفراد أو لجماعات،الأمر الذى يعنى فى المقابل الحد من ملكية الدولة لوسائل الإنتاج الى حد ممكن للإعتقاد بان الأفراد(القطاع الخاص) هم أكثر كفاءة من الدولة ومؤسساتها العامة فى القدرة على التشغيل الأمثل لموارد المجتمع المحدودة الأمر الذى يحقق فى النهاية صالح المجتمع ككل.

ثانيا : بالنسبة للهدف المباشر من القيام بعملية الإنتاج (أو الاستهلاك)

يعتبر تعظيم العائد الشخصى هو الهدف المباشر الذى يبتغيه كل فرد (او جماعه من الأفراد) من قيامه بنشاطه الإنتاجى (سواء كان إنتاجا سلعيا اوخدميا) أو استهلاكياً . فالمبادره الفرديه والحافز الفردى يعتبران بمثابه المحرك الرئيسى لكل النشاط الاقتصادى بشرط ضمان وجود المنافسه الحره .

ثالثا : بالنسبه لكيفية إتخاذ القرارات

تعتبر آلية قوى السوق (أو الية الأثمان) هى الآلية الرئيسيه التى يعتمد عليها المنتجون والمستهلكون فى إتخاذ قراراتهم ، بهدف تعظيم عائدهم الشخصى .. بمعنى آخر يتوقف اتخاذ قررات الانتاج والاستهلاك على الاثمان السائدة (او المتوقعة) والتى تحدد وفقا للتفاعل الحر القوى (العرض) و يمكن تعريفه (الكمية التى يرغب ويتمكن المنتجون من بيعها من السلعة عند الأسعار المختلفه لها خلال فترة زمنيه معينة) و(الطلب)ويمكن تعريفه (الكمية التى يرغب ويتمكن الأفراد من شرائها من السلعة عند الأسعار المختلفه لها وخلال فترة زمنية معينه) وذلك فى سوق تسوده المنافسة. وفى هذا الاطار برز مصطلح (الخصخصة) ليعكس جانبا من هذه التغيرات .**فالخصخصه تعنى اعادة توزيع الأدوار بين الدوله والقطاع الخاص فى ملكيه واداره وسائل الإنتاج فى المجتمع**.وبناء عليه تأخذ الخصخصه صوراً متعددة اهمها ما يلى :

أ - **خصخصه الملكيه** : من خلال تحويل جزء من وسائل الإنتاج المملوكة للدولة (المشروعات المملوكة للقطاع العام) الى ملكية القطاع الخاص (أفراد أو جماعات).

ب - خصخصه الإدارة من خلال :

١. احتفاظ الدول بالملكية مع التوسع فى التعاقد مع القطاع الخاص للقيام بمهام الإداره بالكامل ، أو التوسع فى تاجير الوحدات للقطاع الخاص ، او التوسع فى ابرام عقود التوريد المختلفه وعقود اداء الخدمات مع القطاع الخاص .

٢. احتفاظ الدولة بالملكيه والإداره مع إجراء تغير جذرى فى أسلوب الإداره على نحو مماثل لاسلوب الإداره فى القطاع الخاص (أساليب التعيين وإنهاء الخدمة.أساليب الثواب والعقاب . إمكانية إنهاء الخدمة..الخ)

ج -السماح للقطاع الخاص بانشاء وتملك وإدارة مشروعات :

وهى المشروعات التى كانت تقليدياً مملوكة للدولة ،مثل إنشاء وإدارة الطرق ، ومحطات توليد الكهرباء ، ومحطات مياه الشرب والصرف الصحى والسجون..الخ.

والواقع ان الخصخصه لاتعنى (كما يعتقد البعض) تراجع دور الدولة فى إدارة شئون المجتمع،وإنما تعنى(على العكس) إعادة هيكلة هذا الدور ، بحيث تتحول الدولة عن القيام بدور مباشر فى عملية الإنتاج والتوزيع ،تاركة المهمة للقطاع الخاص ، على أن تتفرغ الدولة لوضع السياسات اللازمه لتهيئه المناخ الملائم لقيام القطاع الخاص بهذا الدور وتفعيله ورقابته .

- **الماليه العامه والديمقراطيه السياسيه :**

عندما نتحدث عن دور الدولة فى النشاط الاقتصادى كما تحدده قواعد المالية العامة : فينبغى أن نتذكر أمرين على قدر كبير من الأهميه :

الامر الاول :فهو ان تدخل الدولة فى الحياة الاقتصادية باساليب المالية العامة يتم عن طريق استخدام السلطة او القهر القانونى،فإشباع الحاجات العامة والاجتماعية لايتم عن طريق الرضاء الطوعى للأفراد، كما يعبر عنه سلوكهم فى السوق ،وانما يتم عن طريق الخضوع لقرارات وأوامر السلطة العامة .الأمر الثاني الدوله ليست كيانا متميزا من انواع خاصة من البشر ،وإنما الدولة هى مجموعه من الاجهزة والمؤسسات التى تجمع أفراد عاديين.ومن الممكن إذا لم تتوافر ضوابط مناسبة ان تتحول تلك السلطة فى ايدى هذه الاجهزة والمؤسسات الى وسيلة لخدمة مصالحهم الخاصه والمباشرة باسم المصلحة العامه ٠ وهنا لابد من توافر الديمقراطيه بحيث لا تستخدم هذه السلطة الا فيما يعود بالخير على المواطنين .ولذلك..لم يكن غريبا ان يكون تطور الديمقراطيه السياسيه فى العالم مرتبطاً بموضوع الضرائب،التى تفرضها الحكومات لتمويل سياستها التدخليه فى حياة المجتمع.وقد بدأت المطالبة بالمشاركة الشعبية فى الحياة السياسيه نتيجه لإصرار الشعوب على ألاتفرض عليها ضرائب دون موافقة ممثلى الشعب على هذا الفرض.ولذلك تقرر معظم دساتير العالم أن الضرائب لاتفرض ولا تعدل إلا بقانون يوافق عليه ممثلو الشعب .

ولا ينبغى أن تقتصر موافقة الشعب على مايفرض على المواطنين من أعباء،وانما يجب أن تمتد ايضا الى اختيار الوجوه التى تنفق عليها هذه الضرائب ، حتى لاتهدر اموالهم فى استخدامات لا طائل من ورائها .بذلك ترتبط الديمقراطية بكل من الإيرادات العامه والنفقات العامة .

- **عناصر المالية العامة :**

وهى تتمثل فى النفقات العامة ،الايرادات العامة ، الموزانه العامة

النفقات العامة :

يقصد بالنفقات العامة : المبالغ النقدية التى تنفقها الدولة بما فى ذلك الهيئات والمؤسسات العامة بقصد إشباع الحاجات العامة والاجتماعيه تحقيقا لدورها فى المجتمع . ويتعين التأكيد هنا على ان هدف النفقات العامة هو تحقيق نفع فى اشباع حاجه عامه أو اجتماعيه ،وبالتالى فإنه لا يجوزان تنفق الدولة مبالغ لتحقيق منافع خاصة لبعض الأفراد أو الفئات بالنظر لما يتمتعون به من نفوذ سياسى او غيره .وإذا كان تدخل الدولة فى المجالات المختلفة ظاهرة عامة فى جميع الدول-فإن حجم هذا التدخل يختلف من دولة الى اخرى،وفى الدولة نفسها من فتره الى أخرى.ومع ذلك فقد كان هناك اتجاه عام لاستمرار تزايد النفقات العامه ،حتى اعتقد البعض ان هناك مبدأ قانونياً اقتصادياًيشير الى ضرورة استمرار تزايد النفقات العامه (مبدا تزايدالنفقات العامة).وقد ساعد على الاعتقاد بهذا المبدأ ماعرفه العالم بوجه عام من تزايد مستمر فى حجم النفقات العامه للحكومات وكذلك نسبتها الى الدخل القومى نتيجة للاتساع المستمر فى مجالات نشاطها — ومع ذلك فقد بدات تظهر فى السنوات الاخيرة دعوة فى عدد من الدول إلى خفض النفقات بالرغبة فى تخفيف اضرار البيروقراطيه .ومظاهر عدم الكفاءه فى الاجهزة الحكوميه.

ومن المبادئ الأساسية للمالية العامة ان تحدد السلطات العامة فى البداية حجم الانفاق الذى ترغب فى القيام به.تحقيقاً لدورها فى حياة المجتمع وعلى ضوء هذه النفقات يتحدد حجم الايرادات العامة ، التى ينبغى ان تحصل عليها السلطات العامة وهذا مايعرف بمبدأ أولوية النفقات العامة. وقد يقوم بالنفقات العامة الحكومة المركزية او الهيئات المحليه كالمحافظات وكمجالس المدن والقرى..واحيانا يطلق على الأولى النفقات الحكومية او المركزية وعلى الثانية النفقات المحلية.

الايرادات العامة :

تلجأ الدوله فى سبيل تغطيه نفقاتها إلى الحصول على مبالغ أو إيرادات من مصادر متعددة.

مصادر الايرادات

١. عوائد الدوله من ممتلكاتها.

٢. الاقراض العام (الدين العام) :وهذا المظهر اختيارى فى ظاهره ،الا أنه يخفى عنصر من عناصر الإكراه حيث يسدد فى الغالب من عائد الضرائب التى تفرض فى المستقبل فهو نوع من الضرائب المؤجله.

٣. الرسوم : مبالغ تفرض مقابل خدمة تؤدى إلى الفرد ولاتتناسب قيمتها مع تكلفه الخدمة ، فقد تكون الرسوم اقل اى ان الدولة تحملت جزء منها مساهمه منها مع الافراد،وقد تكون او تكون اكبر من امثلة ذلك الخدمات التعليميه ،الحصول على جواز سفر استخراج رخصه قيادة

٤. الضرائب :

الضريبة هى (اقتطاع مالى من دخول وثروات الأشخاص الاقتصادية – طبيعيه ومعنويه-تحصل عليها الدولة جبرا منهم بمقتضى ما لديها من سلطة سياديه وقانونية دون مقابل لدفعها.

(وذلك لتمكين الدولة من تحقيق اغراض السياسه المالية)

وتعتبر الضرائب اهم صور الايرادات السيادية للدولة .

من اهم المبادئ القانونية للضرائب مايلى :

-لاتفرض ضريبه الا بمقتضى قانون عام ، ولا يعفى منها أحد الابقانون.

-المساواة بين الممولين فى المعامله امام الضرائب.

-الضريبه اسهام من الافراد فى تحمل النفقات العامة وليست عقوبة عليهم ، وبالتالى تخلتف الضريبه اختلافا تاماعما يحدث احياناً من مصادره الاموال.

وبالاضافة الى ضرورة مراعاة هذه الاعتبارات القانونية لتحقيق حماية حقوق الأفراد ،فان كفاءة السياسه الضريبية تتطلب ان تراعى ايضا عدة مبادئ اهمها :

أ- مبدأ العدالة والمساواة : وهو يعنى أن يتم توزيع اعباء الضرائب على الافراد مع مراعاة ظروفها النسبيه من حيث

قدرتهم على الدفع من جهه ومعاملة المكلفين ذو الظروف المتماثله بنفس المعاملة.

وإذا كانت عدالة الضرائب من اهم مظاهر النظام الضريبى الناجح ،فقد تطورت فكرة العدالة الضريبه حيث كان الرأى السائد قديما يرى ان تربط الضريبة بشكل ما بالمنفعة التى يحققها الفرد لذاتة من نشاط الدولة .وبناء على ذلك كان الغنى يدفع ضريبة أعلى من الفقيرلانه كان يحقق نفعاً أكبر من خدمات الدولة بما له من اموال ولكن الرأى المستقر حاليا هو أن العدالة فى توزيع الضرائب لا ترتبط بفكرة المنفعة وإنما بالقدرة على الدفع.

وعادة ماتقاس القدرة على الدفع بما يحققة الممول من دخل سنوي.وتتجه معظم الدول حاليا إلى ربط الضرائب بالدخل.

ب- مبدأالكفاية:ومقتضى ذلك أن توفر الضرائب حصيله كافية لمواجهة النفقات العامة .

ج- مبدأالملاءمة:بمعنى أن يتم تحصليها بالأسلوب وفى المواعيد المناسبة للممولين،(أى دافعى الضرائب)دون إرهاق من ناحية او تهاون وتيسير للتهرب من ناحية اخرى

د- مبدأ اليقين : بمعنى أن تحدد القواعد الخاصة بفرض الضريبة وحسابها وتحصليها بشكل واضح وسهل ودقيق.

أهم تقسيمات الضرائب :

يمكن تقسيم الضرائب إلى أنواع مختلفة حسب أساس التقسيم :

أ - من حيث وعاء الضريبة ضرائب على الاشخاص وضرائب على الاموال. واهم صور الضرائب على الأشخاص مايسمى بضريبه الرؤوس ،وهو شكل من الضرائب كان معروفا فى الماضى.اما فى العصر الحديث،فإن الضرائب تفرض على الأموال سواء كانت دخلا نقدياً او كانت منقولاً أو عقاراً

ب -من حيث اسعارها الى ضرائب نسبيه وضرائب تصاعديه فالضريبة النسيبة ،يتحدد سعرها بنسبة معينة من الوعاء الخاضع للضريبة دون تغيير فى هذه النسبة مهما زاد او قل هذا الوعاء.أما الضريبة التصاعدية .. فإنها تفرض بنسب متصاعدة مع زيادة قيمة الوعاء الخاضع للضريبه. وفى هذه الحالة ..فان الضريبة تفرض بشرائح بحث يزيد سعر الضريبة مع الارتفاع من شريحة الى شريحة اعلى فى الوعاء الخاضع للضريبة .

- تقسم الضرائب الى الضرائب المباشرة وهى تفرض على الدخل (او الثروة) بمناسبة الحصول عليه ومن امثلتها فى مصر الضريبة الموحدة على دخل الاشخاص الطبيعين والضريبة على أرباح شركات الأموال (مثل الشركات المساهمة)وفقا للقانون الجديد للضرائب رقم ٩١ل٢٠٠٥

اما الضرائب الغير مباشرة فتفرض على الدخل عند انفاقة اهمها الان على الاطلاق الضريبة العامة على المبيعات وفقا للقانون رقم ١١ لسنه ١٩٩١ والقانون رقم ١٧ لسنة ٢٠١١ ،يليها فى الأهميه الضريبة الجمركية التى تتناقص اهميتها تدريجيا بسبب الانخفاض المستمر فى التعريفات الجمركية تنفيذا لالتزامات مصر ،ووفقا لاتفاقيات منظمة التجارة العالمية.

الموازنة العامة

تعريف الموازنة العامة

الموازنة العامة (هى الوثيقة القانونية والمحاسبية التى تبين النفقات العامة،التى ستقوم بها الدولة والموارد المالية التى يتنظر أن تحققها لفترة قادمة ،غالبا بسنة مالية.

وفى ضوء ماأشرنا اليه من ارتباط المالية العامة بالديمقراطيه .. فانه لابد من وأن تعرض الموازنة العامة على ممثلى الشعب وأن تصدر بقانون .ولذلك فإن الموازنه وإن كان مضمونها برنامج مالى لنشاط الدولة .. فهى من الناحية الشكليه قانون يصدر من السلطة التشريعية . وتتضمن الموازنة العامة كما راينا أمرين،هما:النفقات العامة والايرادات العامة للسنة المالية القادمة.

وفيما يتعلق بالنفقات العامة.. فان الموازنه تتضمن تصريحاً للدولة بالقيام بهذه النفقات . اما بالنسبه للايرادات العامة فانها تشير الى توقعات الدولة لما يمكنها تحصيله من ايرادات .ولذلك ..فان ارقام الموازنه عن الايرادات العامة لاتعدو أن تكون مجرد توقعات،ومن هنا فإن اكتمال الرقابة الشعبيه على الموازنة العامة يتطلب أن تعرض الحسابات الختامية للدولة على السلطة التشريعية إلى جانب هذه الموازنة ويمثل الحساب الختامى للدولة الانفاق الفعلى والإيرادات التى حصلت فى سنة مالية سابقة وفى الحقيقة فان رقابة السلطة التشريعيه لنشاط الدولة المالى إنما تتحقق بدرجة اكبر بعرض الحسابات الختاميه على مجلس الشعب لاعتمادها ،ويقوم الجهاز المركزى للمحاسبات باعداد تقارير الحسابات الختاميه.

مبادئ الموازنة العامه :

هذه المبادئ تمثل اتجاهات عامة..وفى كثير من الأحوال،يتم الخروج عليها بالنظر إلى تغيير الظروف وسنعرض أهم هذه المبادئ:

أ- مبدأ سنوية الموازنة :

توضع الموازنه العامة لسنة مالية قادمة لا أكثر،ويسمح ذلك بسهولة التنبؤ بالنفقات العامة والايرادات العامة من ناحية ، ويوفر للمجالس الشعبية الفرصة للرقابة المستمرة. على ان ذلك لا يمنع من أن تأخذ بعض الدول إلى جانب الموازنة السنوية بنوع من البرامج لعدة سنوات وتعد الموازنة فى اطارها . ويمكن النظر إلى الخطة الخمسية باعتبارها نوعا من هذه البرامج الأطول أمدا،وتبدأ السنة المالية فى مصر فى اول يوليو من كل عام.

ب- مبدأ وحدة الموازنة :

تدرج جميع نفقات وإيرادات الدولة فى وثيقة واحدة هى الموازنه العامة للدولة ، مما يعطى صورة متكاملة عن نشاط الدولة.

ج-مبدأ عمومية الموازنة:

تظهر الموازنة جميع النفقات والايرادات بشكل مفصل دون اجراء أيه مقاصة بين ايرادات اى مرفق ونفقاته.

د- مبدأ توازن الموازنه

الأصل أن تكفى الايرادات العامة لتغطية النفقات العامة وبالتالى تتوازن الموازنة العامة.ومن هنا جاءت التسمية (الموازنة) ،ومع ذلك فإن الفكر الاقتصادى قد عرف بعض التطور، عندما الحقت بالحكومه مسئولية تنشيط الاقتصاد القومى،ولو يتحمل بعض العجز فى الموازنة . ومنذ نهايه الحرب العالمية الثانية .بدأت الدول تسرف فى النفقات مما أدى الى تفاقم عجز الموازنات ،وقد أدى هذا التهاون فى تحقيق التوزان والإسراف فى عجز الموازنات إلى تزايد الاعتماد على التوسع فى إصدار النقود وما ترتب عليه من ارتفاع معدلات التضخم .وقد أنعكس ذلك فى عدم استقرار مستويات المعيشة،وظهور اختلالات فى العلاقات الخارجيه للدول . ولذلك فقد بدأ اتجاه عكسى للمطالبة بالعودة بشكل أكبر إلى احترام مبدأ توازن الموازنة بالعمل على تخفيض العجز فيها حتى يتلاشى كلية إن أمكن .

اسئلة الفصل الرابع



١-ضع دائرة حول الحرف الذى يمثل الاجابة الصحيحة فى كل مما يأتى:

-يتمثل الفرق بين الحاجات الفردية والحاجات العامة فى ....

أ- حجم التكلفة.

ب-مبدأ القصر والاستئثار.

ج-درجه الاشباع.

د-حجم المنفعة.

-تتشابه الحاجات الاجتماعيه والحاجات العامة فى كونها تتحقق من خلال ....

أ-المصلحة الفردية والاختيار.

ب-عدالة التوزيع.

ج-استخدام سلطة الدولة.

د-مجموع الانشطة الفرديه.

- كل عبارة ممايلى تعبر عن دور الدولة فى النشاط الاقتصادى عدا ....

أ-اشباع الحاجات العامة.

ب-تحقيق الاستقرار والنمو.

ج-تحقيق مبدأ المصلحة الذاتية للمستهلك والمنتج.

د-تحقيق عدالة التوزيع.

-كل عبارة ممايلى تمثل مبادئ الموزانة العامة عدا ....

أ-ذاتيه الايرادات العامة.

ب-توازن الموازنه.

ج-عموميه الموازنة.

د-وحدة الموازنة.

- يقصد بمفهوم الخصخصة.............

أ-اعادة توزيع الادوار بين الدولة والقطاع الخاص فى ملكيه إدارة وسائل الأنتاج.

ب-سيطرة الدولة على الانشطة الخاصة بقطاع الانتاج.

ج-تعظيم العائد من الانشطة الاقتصادية لصالح الأموال المخصصة للخدمات العامة.

د-قيام القطاع الخاص بالمشاركة فى تحمل بعض نفقات الخدمات الاجتماعيه.

٢-يعتمد السوق فى توفيره للسلع والخدمات على حافز المصلحة الذاتيه وبالتالى تفاعل قوى الطلب والعرض .

فى ضوء هذه العبارة حدد صواب أو خطأ العبارات التالية :

أ-يصلح مبدأ المصلحة الذاتية أو الاختيار فى توفير الخدمات العامة.

ب- قد لايستطيع السوق توفير الخدمات الاجتماعيه بالحجم المناسب.

ج-ينبغى استخدام سلطة الدولة او القهر القانونى فى توفير الخدمات العامة.

د-تعتبر الضرائب نوعاً من القهر القانونى الذى يمكن الاستغناء عنه.

هـ -تعد فكرة الخدمات العامة والاجتماعية اساساً للمالية العامة.

٣-تعد الضرائب من اهم مصادر الإيرادات العامة فضلاً عن أنها ابرز مظاهر سيادة الدولة فى ضوء العبارة السابقة حدد صواب او خطأ العبارات التالية.

أ.ينبغى ان يوجد تناسب بين الرسوم والخدمة المقدمة.

ب.تفرض الرسوم على الأفراد مقابل خدمة معينة.

ج.العدالة فى توزيع الضرائب ترتبط بفكره المنفعة.

د.الرسوم التى يدفعها الأفراد نوع من الضرائب المباشرة.

هـ. ترتبط فكرة الضرائب وتوزيعها بالقدرة على الدفع.

٤-اتخذت عملية الخصخصة عديداً من الصور،والآتى يمثل صور الخصخصة بالمجتمع المصرى.

المطلوب وضع علامة (✓) أمام ما يمثل عملية الخصخصة وعلامة (✗) فيما يمثل غير ذلك:

أ.تحرير التجارة الخارجية.

ب.خفض الرسوم الجمركية على عديد من السلع المستوردة.

ج.طرح نصيب الحكومة من اسهم بعض الشركات المملوكة للدولة للبيع.

د.انتقال بعض او كل حقوق الإدارة فى المؤسسات العامة للقطاع الخاص.

هـ . تشجيع الشباب على القيام ببعض المشروعات الخاصة.

و.توزيع الاراضى المستصلحة والمملوكة للدوله على بعض الشباب.

ز.الغاء نظام التسليم الإجبارى لبعض المحاصيل.

ح.السماح للقطاع الخاص بإنشاء إدارة الطرق العامة ومحطات توليد الكهرباء.

٥- أكتب مقالاً فى موضوع نقل ملكية بعض المشروعات الزراعية أو الصناعية أو الخدمية العامة إلى القطاع الخاص ، موضحاً رأيك فى هذا الموضوع ، مع مراعاة مايلى.

أ.الآثار المترتبة على ذلك.

ب.مناقشة الآراء المعارضة والمؤيدة لذلك ورايك الشخصى ، تجاه تلك الآراء.وسوف يتم تقييم مقالك فى ضوء اتساق أجزائه وكفاية المعلومات الواردة فيه،وليس وفقا لرأيك الشخصى أيا كان.

الفصل الخامس

النقود والبنوك

الاهداف

يصبح الطالب فى نهاية دراسته لهذا الفصل قادراً على أن :

١. يفسر ارتباط ظهور النقود بوجود عيوب لنظام المقايضة.
٢. يوضح كيفيه نشأة النقود
٣. يذكر مراحل تطور النقود
٤. يحدد وظائف النقود
٥. يحدد أنواع المدفوعات الإلكترونية.
٦. يوضح الوظيفة التى أهلت النفود لتصبح القنطرة أو الرابطة التى تصل بين الحاضر والمستقبل
٧. يناقش صحه الرأى القائل بأن(أى شئ يتمتع بالقبول العام من جانب أفراد المجتمع يمكن أن يكون نقوداً)
٨. يشرح العبارة القائلة بأن البنوك هى مؤسسات مالية وسيطة)
٩. يحدد انواع البنوك مع التمييز بين طبيعة نشاط كل نوع منها.
١٠. يحدد نشأة وتطور النقود الورقية ودور البنك المركزى فى إصدارها.
١١. يستتنج دور البنوك فى إصدار النقود بانواعها
١٢. يوضح دور المؤسسات الماليه الوسيطة غير البنوك فى تجميع المدخرات وزيادة فرص الاستثمار.

تمهيد :

ربما كان اكتشاف الإنسان للنقود ،كما هو الحال بالنسبة لاكتشاف النار أو الكتابة . من اهم الخطوات الأساسية فى تطور الحضارة الإنسانية. وقد ساعد هذا الاكتشاف فى ترشيد الانسان لسلوكه الاقتصادى إلى حد كبير مما كان له اكبر الأثر على التقدم الاقتصادى بصفة عامة.

- **المقايضة :**

كان التبادل يقوم فى اول الأمر عن طريق النظام الطبيعى والتلقائى وهو المقايضة ،والمقصود بالمقايضة :هو:مبادلة شئ فى مقابل شئ اخر فمن يحوز شيئا لا يحتاج اليه أو حاجته اليه قليلة ويريد شيئا يحوزه شخصا آخر فإنه يستطيع أن يتفق مع هذا الشخص الآخر لإجراء المبادلة بين الشيئين إذا تصادف وكان هذا الشخص الاخير يرغب فى ذلك.

لكن بساطة المقايضة هى نفسها التى تجعل هذا الأسلوب غير صالح حين تتعدد السلع وتتعقد حاجات الأفراد وتتنوع اذواقهم وتتطور المجتمعات.لذلك لم تلبث أن ظهرت مثالب المقايضة والتى تتمثل فى الآتى :

أ. تفترض المقايضة توافقا متزامنا فى رغبات المتعاملين فى الوقت نفسه ، فينبغى أن يرغب كل من الطرفين فى الحصول على السلعة التى فى يد الطرف الآخر . فى المقابل التنازل عن السلعة التى فى يده،وينبغى،أن يتحقق ذلك فى الوقت نفسه وبالمقدار نفسه،ويطلق على هذا التوافق المتوزان والمزدوج فى الرغبات.

ب. لا تقدم المقايقضة وسيلة صالحة لتقييم السلع،فأية كمية من السلعة (أ) يمكن مقايضتها مقابل السلعة (ب).وتظهر هذه الصعوبه عندما تتعدد السلع.ومن جانب آخر فإن بعض السلع تكون غير قابلة للتجرئة أو التقسيم كالحيوانات،وبذلك لا يساعد نظام المقايضة على إيجاد نظام واضح للمقارنة بين قيم السلع.

ج. تعجز المقايضة عن تقديم وسيلة صالحة لاختران القيم ،فإذا زاد انتاج الفرد عن حاجاته اليومية.فإنه سوف يضطر إلى اختزان ثروته فى شكل سلع.وقد تكون مما ينالها التلف او العطب قد يضطر إلى ان يتبع سلوكاً غير رشيد،إما بالإسراع فى استهلاكها دون حاجة حقيقية أو التنازل عنها دون مقابل مناسب.

- **ظهور النقود**

ظهور النقود نشأ عن طريق انقسام عملية المقايضة إلى جزئين هما (البيع والشراء) والبيع هو التنازل عن السلعة التى لايحتاجه الفرد فى مقابل النقود ثم ثانيا يستخدم الفرد النقود للحصول على السلع الأخرى التى يحتاجها وهذه هى عملية الشراء .

- **تطور النقود**

لم تظهر النقود بخصائصها الحالية مرة واحدة ،بل خضعت لتطور طويل ،ومن أجل التخلص من عيوب المقايضة ،فمرت النقود بالمراحل التاليه:

١. **النقود السلعيه** :هى سلعة ذات قبول عام تم استخدامها كمقياس للقيمة ووسيط فى التبادل، فاكتملت لها الوظائف الأساسية،إلا انها واجهتها مشاكل كثيرة منها القابلية للسرقة ، القابلية للتلف أو الحريق ، القابلية للموت مثل الحيوانات ، ضعف القابلية للتخزين مدة طويلة.

٢. **النقود المعدنية**

تم استخدامها لتفادى عيوب النقود السلعية وكانت من الذهب او الفضة حيث انها يسهل حملها ويسهل اخفائها ويمكن تجزئتها وغير قابلة للتلف .

٣. **النقود الورقية**

ومع استمرار الدور البارز للتجار بإيداع الذهب والفضة لدى الصياغ ثم البنوك ،مقابل إيصالات أو أوراق تجارية ،وبدلا من تداول الذهب والفضة بين المتعاملين،فقد اصبح التجار يقبلون تسوية معاملاتهم فيما بينهم مقابل تداول

هذه الايصالات أو الأوراق التجارية الممثلة للذهب أو الفضة الموجود فى البنوك وبذلك بدأت تظهر اوراق نقدية قابله للتحويل فى الحال لدى البنوك إلى ذهب وفضة ،واصبحت هذه الأوراق تتداول فى الأسواق وتقبل التعامل بدلاً من هذين المعدنين،واصبح حامل هذه الآوراق ،ايا كان مالكا لقيمة من الذهب أو الفضة بقدر ماهو مدون فيها ،وتلتزم البنوك أمامه بالوفاء بحقه من هذين المعدنين بمجرد طلبه.. وهكذا بدأت تظهر النقود الورقية البنكنوت كاملة القيمة.

٤. النقود الائتمانية

ومع استقرار العرف على التعامل بالنقود الورقية التى يصدرها الصاغة أو البنوك ، عمدت هذه البنوك الى التوسع فى نشاطها بحيث اصبح المتعاملون يقبلون ديون أو التزامات البنوك فى تعاملهم نظراً للثقة الكاملة فيها.وقد أدى هذا التطور إلى ظهور شكل جديد للنقود ، يرتبط بفكرة الدين أو الالتزام على البنوك هو النقود الائتمانية أو نقود الودائع .ويكفى هنا أن نشير إلى أن العلاقة بين هذه النقود الائتمانية والنقود الورقية تشبه العلاقة بين النقود الذهبية والنقود الورقية.ففى كلتا الحالتين تصدر البنوك نقوداً جديدة بناء على الاحتفاظ بالنقود القديمة فى خزائنها

• المدفوعات الالكترونية E-payment

إذا كانت النقود سابقا قد مرت بمراحل عديدة فى تطورها تحت ضغط الحاجات لتيسير المبادلات بين المتعاملين،فإنه من المتوقع أن تشهد تطوراً مادام الإقتصاد والمجتمع وكذلك المعاملات فى تطور مستمر.ومن هنا ظهرت للوجود الوسائل الإلكترونية للمدفوعات .

أ / الوسائل الإلكترونية للمدفوعات:

تستخدم هذه الوسائل لتسوية المدفوعات المترتبة على التعاملات ،التى تتم بين الأفراد بعضهم البعض أو بينهم وبين المؤسسات الاقتصادية والتجارية أو فيما بين هذه الأخيرة

- ونستعرض الآن أهم أنواع وأهم خصائص هذه البطاقات على النحو التالى:

١. بطاقات الائتمان Credit cards

تمنح هذه البطاقة حاملها ائتمانا لمدة معينة ، وفقا للشروط المتفق عليها ،بحيث يستطيع أن يستخدمها لشراء مايشاء من سلع وخدمات من السوق فى الداخل أو الخارج.

وتلجأ الجهات المصدرة لهذه البطاقات إلى منح مزايا لحامليها مثل

١. اعفائهم من دفع الفوائد لمدة محددة قد تصل إلى قرابة شهرين، اذا ما سددوا قيمة الائتمان كاملة خلالها

٢. لايلتزم العميل بالسداد الكامل لقيمة الائتمان بعد انتهاء المدة السابقة ،بل قد يسدد نسبة معينة تحددها الجهة المصدرة كأن تكون ١٠٪ أو ٥٪ يستطيع العميل أن يستعملها فى الشراء من الأسواق الخارجية أيا كانت العملة المستخدمة ويسوى قيمة معاملاته فى النهايه بالعملة الوطنية التى اصدرت على أساسه البطاقة ،أى لا يلتزم بأن يسدد بالنقد الأجنبى .

وتصدر هذه البطاقة عن جهات عديدة بعضها مصرفى والبعض الآخر غير مصر فى .

٢. بطاقات الحسم (الخصم) الفورى Debit card

وتختلف هذه البطاقات تعطى عن سابقتها فى انها لا تمنح حاملها ائتمانا و لكن يتم خصم قيمة الصفقة من حساب العميل فى البنك على الفور.

٣. بطاقات الصرف الآلى ATM cards

وهى بطاقات تعطي لصاحبها ميزة صرف النقود من شبابيك إلكترونية،معدة خصيصا لهذا الغرض فى الكثير من البنوك وفروعها . وتتميز هذه البطاقات أن حاملها يستطيع أن يحصل على مقدار النقدية المتفق عليه من البنك الذى يصدرها فى أى وقت حتى بعد إغلاق البنوك لأبوابها ،كما تتسم بأنها اصبحت منتشرة بشكل كيبر.

٤. البطاقات المدفوعة القيمة مقدما stored value cards

وهى البطاقات التى يتم دفع قيمتها مقدماً عند شرائها وتخزن فيها قيمتها والتى تكون من فئات مختلفة ، مثل:البطاقات التى تستخدم فى التليفونات ووسائل النقل ،آلات التصوير الفوتوغرافى الأتوماتيكية..الخ.وقد تستخدم هذه البطاقات لمرة واحدة أوعدة مرات حسب القيمة المخزنة فيها والغرض من الاستخدام ومدته.

ب / النقود الإلكترونية E-money

وتضم هذه النقود – حتى الان – نوعين :

الأولى :البطاقات الذكية smart cards

وهى بطاقات يثبت عليها شريط ممغنط ، مثبت عليه شريحة الكترونيه أو أكثر تمثل حاسبا صغيرا

مزود بذاكرة،ويكون قادرا على تخزين، واسترجاع ومعالجة البيانات المسجلة عليه . ويتم تحميل هذه البطاقة بقيمة معينة من حساب العميل وكذلك كافة البيانات الشخصية الخاصة به.لذلك فإنه عند التعامل يتم تمريره على آلة قارئة له ، ويتم خصم التعاملات دون الحاجة لقيام المشترى بالتوقيع أو حمل ما يثبت شخصيته..

الثانية : النقود الرقميه digital money

وهى النقود التى تأخذ صورة نبضات bits كهرومغناطيسية ،يحملها كارت ذكى على النحو السابق او على الهارد درايف (hard drive) للحاسب الشخصي وكل مايفعله العميل هو الضغط على ارقام معينة لتسوية المعاملات أو الاضافة الى الحساب ، او النقل من حساب الى اخر .

والواقع أن انتشار مثل هذه التطورات يحتاج إلى بنية اساسيه فى الجهاز المصرفى ،أى يحتاج الى بنوك متطورة ، كما يحتاج الى محال تجاريه حديثة تتوافر لديها الوسائل الالكترونية المجهزه لاستخدام هذا النوع من النقود وتتطلب شبكات إلكترونية للتعاملات بين البنوك والمحلات التجارية بعضها البعض.

- **وظائف النقود**

١. **انها قوه شرائية عامة** : والمقصود بذلك هو أن من يحوز النقود يستطيع ان يحصل على ما يشاء من سلع وخدمات معروضة للبيع ، وبالمثل فأن كلاً من يعرض خدمة او سلعة للبيع يقبل التخلى عنها مقابل الحصول على النقود وهكذا ترتبط القوة الشرائية العامة للنقود بتمتعها بالقبول العام من كافة افراد المجتمع الذى تستخدم فيه.

٢. **النقود وسيط فى التبادل :**

وهذه هى الوظفية الأساسية للنقود ، وتعتمد هذه الوظيفه على تمتع النقود بالقبول العام فى المبادلات ،فنظراً أن الجميع يقبلون التنازل عن سلعهم أو خدماتهم المعروضه للبيع مقابل الحصول على النقود، فإننا نقول بأن النقود قد اصبحت تقوم بدور الوسيط فى التبادل ... وهكذا تنقسم عملية المقايضه الى عمليتين هما البيع ثم الشراء ،ونلاحظ أن وظفية النقود كوسيط فى التبادل يتضمن تدخل النقود بالفعل فى عملية المبادلة

٣. **النقود مقياس للقيمة :**

يتم التبادل فى الاقتصاد الحديث بين عديد من السلع والحدمات التى تعرض فى الأسواق وهذه السلع غير متجانسة ،ومن ثم لابد عند اجراء تبادل بينهما من إجراء المقارنة بين قيمها لتحديد معدلاتها وذلك باستخدام وحدة قياس واحدة وإلا تعقدت الأمور وصعب الأمر على الأفراد فى متابعة هذه المقارنات .وتفيد فى هذا المقام حيث تقدر قيم مختلف السلع والخدمات بعدد ماتساويه من وحدات نقدية .

٤. **النقود مخزن للقيمة :**

النقود لها قوة شرائية عامة فى الحال وفى المستقبل ومن ثم تعطى لحائزها الحق فى الحصول على مايشاء من السلع والخدمات المعروضة فى المستقبل :أى أن من يحتفظ بالنقود يكون محتفظا بقوى شرائية عامة يستطيع أن يوظفها فى أى وقت للحصول على مايشاء من سلع وخدمات . ويشترط لكى تؤدى النقود هذه الوظيفة التمتع بالاستقرار النسبى فى قيمتها .ومن هنا يتضح لنا أن استقرار الأسعار ومايعنيه من استقرار لقيمة النقود هى شرط ضرورى لقيام النقود بوظيفة مخزن القيمة ،وبدونها يتعرض الاقتصاد القومى والمبادلات والادخار للاهتزاز والتدهور.

- **النقود والقبول العام :**

النقود هى كل شئ يتمتع بالقبول العام من افراد المجتمع ،ويقوم بالتالى بوظائف الوسيط فى التبادل ومقياس القيم ومخزن للقيمة فى آن واحد.فالنقود تقبل فى التعامل لاعتقاد كل فرد انها تتمتع بهذا القبول العام لدى كل فرد آخر . وهكذا فكل فرد يقبل التعامل بها لانه يعتقد أن غيره سوف يقبلها وبالتالى يقبلها الجميع.

البنوك (المصارف)

البنوك مؤسسات مالية وسيطة تقوم بتجميع مدخرات الأفراد والوحدات الاقتصادية التى تحقق فائضا وتستخدمها

فى اقراض الأفراد والمشروعات.

وهى مؤسسات وسيطة لأنها تقوم بالوساطة بين جمهور المدخرين وجمهور المستثمرين .وتعتبر البنوك من اهم المؤسسات الماليه الوسيطة .وتحقق الوساطة المالية فائدة كبيرة للاقتصاد القومى ومنفعة مباشرة للمدخرين والمستثمرين فمن طريق المؤسسات المالية يمكن تجميع احجام كبيرة من المداخرت من العديد من صغار المدخرين .

فمع وجود هذه المؤسسات يكفى أن يضع المدخر مدخراته لدى البنك دون الاضطرار إلى البحث عن مستثمر فى حاجة الى أموال للقيام بمشروعاته .وفى نفس الوقت فإن صاحب المشروع إذا أحتاج إلى الاقتراض .. فإنه يتوجه إلى البنوك للحصول على تمويل بالاقتراض منها دون أن يكون عليه أن يبحث عن مدخر تتوافر عنده فوائض مالية.

- **انواع البنوك :**

١. البنوك المركزية :

البنك المركزى هو الجهة التى تأتى على رأس الجهاز المصرفى فى الدول المختلفة من خلال الوظائف المركزية ذات الاهمية الحيوية التى تقوم بها ،مثل :اصدار النقود – بنك الحكومة – بنك البنوك – وضع وأدارة السياسة النقدية فى الدولة بما لديها من وسائل الرقابة الكمية والنوعية.

٢. البنوك التجارية :

البنك التجارى هو بنك عام النشاط وغير متخصص حيث يتلقى الايداعات ويمنح (الائتمان) لكافة الأفراد والمؤسسات مختلفة الأنشطة الاقتصادية والتجارية ويقوم نشاط البنك فى الأساس على التمويل قصير ألاجل.

وتقوم البنوك التجارية الآن بعديد من الأنشطة التى تدر عليها عائد كبيراً.وتشهد البنوك التجارية مرونة كبيرة فى هذا المجال : إذ لم تعد وظائفها تقف عند حد الوظائف النقدية أو التمويلية التقليدية.

٣. البنوك المتخصصة :

وهى بنوك تتخصص فى منح الائتمان لنوع محدد من النشاط ،بحيث يقتصر عملها على هذا النشاط دون غيره ،مثل البنوك العقارية ،الزراعية ،الصناعية ....إلخ.ولكنه يجدر ملاحظة ان نشاط هذه البنوك شهد توسعا فى السنوات الاخيره .

٤. البنوك الاستثمارية :

وهي مؤسسات مالية وسيطة تقوم بتجميع الاموال ، التى تتوافر لديها من المساهمين أو من خلال طرح السندات فى السوق المالية ، ووضعها تحت تصرف المستثمرين.ويقوم نشاط البنك فى الأساس على طرح السندات فى السوق المالية ،ووضعها تحت تصرف المستثمرين .ويقوم نشاط البنك فى الاساس على التمويل طويل الأجل .وتنتشر هذه البنوك فى الدول المتقدمة خاصة الولايات المتحدة وانجلترا .

ولقد أدى التطور الاقتصادى إلى ظهور نوعين جديدين من البنوك هما :

أ- البنوك الشامله Universal banks

وهى البنوك التى لم تعد تتقيد بالتعامل فى نشاط معين أو فى منطقة أو اقليم معين ،واصبحت تحصل على الأموال من مصادر متعددة،وتوجهها إلى مختلف الأنشطة لتحقيق التنمية الاقتصادية والاجتماعية.

ب- البنوك الالكترونية E-banks

وهو بنوك تعمل بالكامل من خلال الانترنت حيث تتم المعاملات والعلاقات فيها من خلال الوسائل الالكترونية وليس اللقاء المباشر ، وتعرف هذه البنوك بإسم البنوك الافتراضية Virtual banks.

- **البنوك واصدار النقود :**

ولكى يتضح هذا الدور للبنوك فى اصدار النقود فاننا نتعرض بإيجاز لاصدار النقود الورقية ثم النقود الائتمانية

١. البنوك و إصدار النقود الورقية :

لجأ التجار الى ايداع نقودهم من الذهب والفضة فى البنوك ،فى مقابل الحصول على ايصالات (سندات)إلى أن أصبح التعامل فى النقود الذهبية والفضية يتم عن طريق تداول السندات الممثلة للمعدن فى البنوك ،وهكذا بدأ المتعاملون فى تداول هذه السندات بدلا من تداول الذهب والفضة ذاتها واستقر التجار على قبول السندات بدلا من الذهب او الفضة ،لمعرفتهم بأن حاملها يستطيع فى أى وقت ان يتقدم الى البنك الذى اصدرها ،ويحصل على الذهب والفضة بالقيمة الصادر بها السند وقد استجابت البنوك دائما الى مثل هذه المطالبات ،وهكذا ظهرت النقود الورقيه الى الوجود

كانت البنوك تراعى فى هذا الوقت تحقيق نوع من التناسب بين مالديهم من ذهب وماتصدره من سندات على هذا النحو ،فهى وان كانت تصدر سندات مستقلة اعلى من قيمة المعدن النفيس لمقابلة الطلبات المقدمة للسحب .

وبعد هذا عرفت بعض الدول عديداً من الأزمات ،عندما بدأت بعض البنوك تسرف فى اصدار النقود الورقية بكثرة ،مما عرضها للافلاس وضياع حقوق الأفراد ،ولذلك لم تلبث أن عمدت الحكومات إلى قصر أصدار النقود الورقيه (البنكنوت)على أحد البنوك فقط،والذى اصبح فيما بعد البنك المركزى كما بدات تضع بعض القيود على اصدار هذه النقود الورقيه وقد ارتبطت هذه القيود فى اول الامر بضرورة توافر نسبه من الذهب أنواع محددة من السندات والاوراق المالية ذات القيمة المستقرة مقابل اصدار النقود الورقية من جانب البنك المركزى.وهذا يسمى بالغطاء النقدى..كذلك بدأت الدول تلزم الافراد بقبول هذه النقود الورقية فى التعامل ،فلم يعد قبولها اختيارياً كما كانت الحال فى أول الأمر ، وانما اصبح اجبارياً بحكم القانون.

- **تطور إصدار النقود الورقية فى مصر**

ارتبط إصدار النقود الورقية في مصر بانشاء البنك الاهلى المصرى عام ١٨٩٨ ،وكانت النقود الورقية التى يصدرها البنك الاهلى اختيارية فى أول الامر ،ومع قيام الحرب العالمية الاولى ،صدر امر عال فى ١٩١٤ بأن يكون لأوراق

البنكنوت الصادرة من البنك الأهلى المصرى القيمة نفسها للنقود الذهبية كما حرر هذا الأمر البنك الأهلى من ضرورة تحويل السند الذى يصدره إلى ذهب عند المطالبة من حامله.

وبذلك ..فقد اصبحت النقود الورقية ،وانه لم يعد يمكن تحويلها إلى ذهب

وفى عام ١٩٥٧ أصبغت صفه البنك المركزى رسميا على البنك الاهلى ،وتاكد إشراف الحكومة عليه،وفى عام ١٩٦١ انشئ البنك المركزى المصرى ،واستقل بذلك عن البنك الاهلى ،وأصبح له وحده منذ ذلك التاريخ الحق اصدار النقود الورقية فى مصر.

١. البنوك والنقود الإئتمانية :

إذا كانت النقود الورقية قد غيرت من شكل النقود المعدنية باصدار أوراق البنكنوت باعتبارها بديلا من الذهب والفضة الموجودة فى خزائن البنوك،فإن النقود الائتمانية قد فعلت الشئ نفسه بالنسبة للنقود الورقية .. فقد لاحظت البنوك التجارية أن الافراد يقومون بايداع نقودهم الورقية لديها مكتفين بالتعامل فيما بينهم عن طرق الشيكات.

وهكذا بدات تتنقل ودائع الأفراد فيما بينهم عن طريق الشيكات .ومع استقرار عادة التعامل مع البنوك والثقة فى قدرتها دائماً على الوفاء بالتزاماتها ،بدات البنوك التجارية فى التوسع فى الاقتراض بأكثر مما لديها من ودائع ،ونظراً لانتشار عادة قبول الشيكات فى التعامل فإن الصورة الجديدة من مديونية البنك التجارى قد اصبحت نوعا من النقود ،وهى تسمى "نقودا ائتمانية" ،لانها تخلق بمناسبة قيام البنك التجارى بمنح ائتمان ،اى قروض لعملائه ،وهذه القروض لاتمنح فى شكل نقود مادية (ورقية) وانما فى شكل حسابات تفتح بأسم العميل ويتصرف فيها عن طريق الشيك ،وهكذا اصبحت مجرد مديونية البنك التجارى نوعا من النقود لانها تقبل فى التعامل ، التدوال لهذه النقود هى استخدام الشيك.وبطبيعية فإن البنوك التجارية لا تسرف فى خلق هذه المديونية.لأنها يجب أن تكون دائما على استعداد للدفع نقداً للمستفيد من الشيك الذى يطلب صرفه فى شكل نقود ورقية.

وينبغى أن يكون واضحا أن النقود الائتمانية هى مديونية البنك كما هى مسجلة فى دفاتره،اما الشيك فهو وسيلة انتقال هذه المديونية من عميل الى اخر..كذلك فإنه من المفيد الإشارة إلى ان النقود الائتمانية لم تصل بعد الى مرحلة النقود الورقية ، فلا زال الفرد حراً فى قبول تسوية حقوقه عن طريق قبول الشيك ومديونية البنك أو الاصرار على تسوية حقوقه بالنقود الورقية.

• المؤسسات المالية الوسيطة غير المصرفيه :

إذا كانت البنوك هى اهم الموسسات المالية الوسيطة..فأنه يوجد إلى جانب البنوك،مؤسسات مالية أخرى تعمل فى مجال الوساطة فى التمويل .ومن أهم هذه المؤسسات المالية الوسيطة شركات التامين وصناديق الاستثمار وصناديق الادخار والمعاشات وشركات توظيف الاموال

البورصة:

- **او سوق تداول الأوراق المالية :**

يتوقف معدل النمو فى أى اقتصاد معاصر – بصفه عامة – على حجم الاستثمارات الجديدة التي يتم تنفذيها ويحتاج هذا التنفيذ بالطبع إلى توفير الموارد المالية اللازمة ، هذه الموارد قد تكون متوافرة ذاتيا لدى الجهة المحتاجة للتمويل(فرد او جماعه او حتى الدولة)فتسخدمها مباشرة فى تمويل استثماراتها الجديدة التى ترغب فى تنفيذها .أما إذا لم تتوافر هذه الموارد الذاتية ..فإن هذه الجهة تجد نفسها مضطرة إلى اللجوء للغير لمدها بالتمويل اللازم،وهنا نفرق بين حاليتن:

قد تلجا الجهة الى دعوة الغير للمشاركة معها فى التمويل ،باعتبارهم "مساهمين" فى المشروع المطلوب تنفيذه.

-وقد تلجا هذه الجهة إلى دعوة الغير لإقراضها المال،الذى تحتاجه لتمويل الاستثمار المرغوب تنفيذه باعتبارهم "دائنين"فقط وليسوا "مساهمين" وهنا تلجا الجهة للاقتراض من احدى وحدات الجهاز المصرفى –كوسيط مالى – أو تقوم بنفسها بالاقتراض مباشرة من الجمهور (افراد أو مؤسسات)من خلال اصدار صكوك مديونيه على نفسها (اوراق مالية)قد تكون بدورها فى صورة اذون قصيرة الاجل (اقل من عام عادة) او فى صورة سندات طويلة الاجل .هذا.. وقد اصبحت "الاسهم" و "السندات"من اهم و أشهر الصور المعاصرة لتوفير التمويل اللازم..إما لتمويل الاستثمارات الجديدة أو غيرها.

- **تعريف الاسهم والسندات والفارق بينهما :**

السهم هو صك أو ورقه مالية تمثل حصه الشريك فى رأس مال الشركة المساهمة او (التوصية بالاسهم) التى تساهم فى راسمالها : اى انه يمثل حقا للشريك فى الشركة ويمثل فى الوقت ذاته الورقة المثبتة لهذا الحق .

أما السند فهو صك او ورقه مالية تمثل دينا لصحابها تجاه الشركة المصدرة لها ، ويعتبر السند بصفة عامة بمثابة قرض طويل الاجل تحصل عليه الشركة من خلال الاكتتاب العام ويصدر فى شكل شهادات متساوية القيمة وقابلة للتداول بالطرق التجارية . كذلك قد تكون هذه الشهادات اسمية،أى يحدد فيها اسم صاحبها ،او حاملها دون تحديد لاسم صاحب الشهادة.

وتتمثل أهم الفروق بين السهم والسند فيما يلى:

١. يحق لحامل السهم الاشتراك فى إدارة الشركة أو الرقابة عليها.بينما ليس لحامل السند هذا الحق.
٢. يحق لحامل السهم الحصول على ارباح إذا حققت الشركة أرباحا فإذا لم تحقق فلا يحصل على شئ ،اما حامل السند فله الحق فى الحصول على فائدة ثابتة سنويا بصرف النظر عن تحقيق الشركة ارباح من عدمه.
٣. لا يحق لحامل السهم –كأصل عام- استرداد قيمة اسهمه،طالما ظلت الشركة باقية ويظل شريكا فيها ،بينما

يحق لحامل السند استيفاء قيمة سنده فى الميعاد المحدد وبعدها تنقطع صلته بالشركة.

٤. لايحق لحملة الاسهم فى حالة حل الشركة وتصفيتها استرداد قيمتها الابعد حصول حملة السندات على قيمة سنداتهم والفوائد.

- **سوق الأوراق المالية :**

فى الانظمة الاقتصاية الحديثة ، والتى تتمتع بوجود قطاع مالى متطور،تنظم عملية إصدار وتداول الأوراق المالية (وبصفة خاصة الأسهم والسندات وغيرها)من الاوراق المالية)من خلال سوق الأوراق المالية.

وينقسم سوق الأوراق المالية إلى سوقين رئيسيين هما :

١. سوق الإصدار أو السوق الأولية :

وهو السوق التى يتم فيها إصدار الاوراق المالية لأول مرة من خلال العملية المعروفة باسم عملية "الاكتتاب" والتى تتمثل فى طرح الاوراق المالية للبيع وعرضها على الراغبين فى الشراء وفقا لإجراءت حددها القانون. وبالنسبة للاسهم فقد يتعلق "الاكتتاب" بالاسهم الممثلة لرأسمال الشركة المساهمة عند تاسيسها أو عند زيادة راسمالها بعد التاسيس او عند زيادة رأسمالها بعد التاسيس .وبالنسبة للسندات..فقد يتعلق الاكتتاب بسندات صادرة عن شركة،او عن شخص من الأشخاص الاعتبارية العامة التى يحق لها اصدار مثل هذه السندات

٢. سوق التداول أو البورصة :

وهى السوق المنظمة التى يتجمع فيها العارضون والطالبون للأوراق المالية التي سبق اصدارها فى سوق الاصدار..وذلك فى أوقات وأماكن محددة حيث يتم لقاء وسطاء السوق لتنفيذ أوامر عملائهم المتلقاه من قبل ،واثناء فترة عمل البورصة لبيع وشراء الاوراق المالية. والقاعدة أن الاوراق المالية التى يسمح بتداولها فى "اطار البورصة" هى الاوراق التى استوفت الشروط المقررة.لقيدها فى البورصة ويقصر التعامل داخل قاعة التداول على وسطاء السوق المصرح لهم بالتعامل فيها طبقا للقواعد المقررة وتحت إشراف الهيئة القائمة على ادارة البورصة ولكن إلى جانب هذه السوق النظامية هناك ايضاً السوق غير النظامية خارج البورصة حيث يتم تداول الأوراق المالية غير المستوفاة بشروط القيد فى البورصة ولحين إتمام إجراءات قيدها.

أهم وظائف البورصة :

١. تلعب "البورصة"دوراً رئيساً فى الاقتصاديات المعاصرة.وتتمثل أهم الوظائف التى تؤديها فيما يلى:

٢. تعبئه المدخرات وتوجيهها إلى الاستثمار فى قنوات شرعية منظمة تخدم الاقتصاد الوطنى.

٣. توفير سوق دائمة ومستقرة ومفتوحة للتعامل تيسيراً على المدخرين والمستثمرين.

٤. توفير السيولة لحائزى الاوراق المالية،اذا مارغبوا فى بيع مافى حوزتهم من أوراق لاحتياجهم الى النقد السائل إما لاستخدامه فى الاستهلاك أو فى الاستثمار فى اوجه اخرى .

٥. توفير الضمانات اللازمة لاتمام الصفقات وفقاً لقواعد محددة مبسطة وشفافة.

٦. توفير مؤشرات عن حقيقة حجم النشاط ومستوى أداء الاقتصاد القومى والتى تعكسها حركة اسعار أسهم الوحدات الإنتاجية المتداولة اسهمها فى البورصة

اسئلة الفصل الخامس

١-كان ظهور النقود تعبيرا عن قصور نظام المقايضة

فى ضوء العبارة السابقة واضح مايلى :

عيوب نظام المقايضة.

تطور اشكال النقود.

ج- وظائف النقود.

٢-ضع دائرة حول الحرف الذى يمثل الاجابة الصحيحة فى كل مما يأتى :

-تختلف بطاقات الائتمان عن بطاقات الحسم فى ....

أ- القيمة الحقيقة.

ب- الخصم الفورى او السداد الآجل.

ج-جهة الإصدار.

د-صرف النقود الكترونيا.

- الاتى يمثل دور البنك المركزى عدا ....

أ- إصدار النقود.

ب- إدارة السياسة النقدية.

ج- الرقابة على البنوك.

د-منح القروض للمشروعات.

٣-"ادت التطورات الاقتصادية إلى ظهور العديد من انواع البنوك والتى تختلف عن بعضها فى النشاط الرئيسى الذى يقوم به كل بنك".

فيما يلى أمثله لبعض انواع البنوك ،والمطلوب منك كتابة نوع النشاط الذى يقوم به كل بنك :

نوع البنك	نوع النشاط
البنوك المتخصصة	....
البنوك الاستثمارية	....

البنوك التجارية.................................

البنك المركزى.................................

٤-ضع دائرة حول الحرف الذى يمثل الاجابة الصحيحة فيما ياتى :

١- تتشابة الأسهم والسندات فى ان كليهما يمثل ......

أ-حصة الشريك فى راس المال.

ب-دين لصاحبه تجاة الشركة أو الجهة المصدرة.

ج-قرضا طويل الأجل.

د-ورقة مالية يمكن تداولها

٢- الاتى:يمثل خصائص الأسهم عدا ......

أ-المشاركة فى الادارة.

ب- الحصول على الارباح فى حالة حدوثها.

ج-يمثل دين على الشركة المصدرة.

د- يمكن تداولة فى سوق الاوراق المالية.

٣- الاتى يمثل خصائص السند عدا........

أ-يمكن تداولة فى سوق الاوراق المالية.

ب-يمثل دينا لحامله تجاه الجهة المصدرة لة.

ج-الحصول على فائدة

د-المشاركة فى الإدارة

٥- من خلال متابعتك لحركة الأوراق المالية بالبورصة المصرية فى القاهرة والاسكندرية عبر وسائل الاعلام،اكتب فيما يلى لايزيد عن صفحة واحدة عن :

أ- الدور الذى تلعبه البورصة المصرية فى الاقتصاد المصرى.

ب-قائمة بأهم الأوراق المالية التى ترتفع قيمتها وكذلك التى تنخفض قيمتها.

الفصل السادس

العلاقات الاقتصادية الدولية

الاهداف :

يصبح الطالب فى نهاية دراسته لهذا الفصل قادراً على أن :

١. يحدد الخصائص الخاصه بالتجارة الدولية ،والتى تميزها عن التجارة الداخلية.
٢. يوضح أهمية وجود ميزان سنوى للمدفوعات لكل دولة
٣. يبين مضمون ميزان أو حساب العمليات الجارية
٤. يميز مابين حساب رأس المال طويل الأجل ،وحساب راس المال قصير الاجل.
٥. يوصح الصور والأشكال المختلفة لانتقالات رؤوس الأموال مابين الدول ،وكذلك الأسباب والدوافع التى تقف وراء هذه الانتقالات .
٦. يحدد التغيرات الاقتصادية المصاحبة لعملية العولمة.
٧. يوضح المتطلبات التى ينبغى الوفاء بها لمواكبة العولمة.
٨. يبين القوى الاقتصادية الرئيسة فى العالم المعاصر.

تمهيد

لاتقتصر العلاقات الاقتصادية على الافراد المقيمين داخل إقليم الدولة، وانما ايضاً علاقات اقتصادية كثيرة بين افراد ينتمون إلى دول مختلفة.من هنا تظهر أهمية دراسة العلاقات الاقتصادية الدولية ،وتتنوع هذه العلاقات ،فهى تشمل انتقالات السلع فيما بين الدول ، وهو مايعرف بالتجارة الدولية.ولكن هذه العلاقات الاقتصادية الدولية لا تقتصر على انتقالات السلع ومايرتبط بها من وسائل للدفع. فهى تشمل ايضاً انتقال عناصر الانتاج : فالعنصر البشرى ينتقل من دولة إلى اخرى بشكل مؤقت كما هى الحال فى السياحة ، او باشكال اكثر استقراراً كما فى حالات الهجرة أو الانتقال للعمل فى دول اخرى .كذلك تشمل العلاقات الاقتصادية الدولية انتقال رؤوس الاموال للاستثمار فى دول أخرى او لاقراضها أو بمناسبة تقديم المنح والمساعدات.

- **التجارة الدولية والتجارة الداخلية :**

حظى تبادل السلع والخدمات فيما بين الدول باكبر قدر من العناية من الاقتصاديين فى اطار التجارة الدولية ،بل لقد نظر إلى انتقالات رؤوس الأموال فى كثير من الاحوال باعتبارها لا تمثل ظاهرة منفصلة عن التجارة ، وانما تعتبر شكلا مكملا لتبادل السلع والخدمات.

- **خصائص العلاقات الاقتصادية الدولية :**

١. وجود الحدود السياسية
٢. اختلاف العملات
٣. اختلاف فى اللغة والعادات والقيم السائدة فى كل دولة.
٤. تكاليف النقل

- **ميزان المدفوعات :**

ميزان المدفوعات هو سجل محاسبى منتظم لكافة المبادلات أو العمليات الاقتصادية،والتى تتم مابين المقيمين فى الدولة والمقيمين فى العالم الخارجى خلال فترة معينه (سنة فى الغالب)

وينبغى أن ندرك هنا ان ميزان المدفوعات :سجل لما تحصل عليه الدولة من ايردادت من العالم الخارجى وماتدفعه من مدفوعات ، فهو سجل للمتحصلات وللمدفوعات فى الميزان خلال فترة معينة وليس بياناً للمركز القانونى للدولة، باعتبارها دائنة أو مدينة للعالم الخارجى . وسوف يتضح ذلك عندما نرى كيف يتم قيد هذه العمليات وخاصة العمليات الراسمالية.

وإذا كان ميزان المدفوعات هو سجل لكافة العمليات التى تجريها الدولة مع العالم الخارجى خلال فترة معينة (سنة عادة)..فقد جرت العادة على تقسيم هذا الميزان إلى اقسام،من شانها المساعدة على حسن فهم العلاقات الاقتصادية المختلفة للدولة مع العالم الخارجى،وأهم تقسيمات ميزان المدفوعات قسمان ،هما:

أولاً ،ميزان او حساب العمليات الجارية :

ويتضمن علاقة الدولة مع الخارج ،فيما يتعلق بالتجارة الخارجية للسلع والخدمات.. ويفرق عادة فى هذا الميزان او الحساب بين ميزان التجارة المنظورة وميزان التجارة غير المنظورة،ويشمل ميزان التجارة المنظورة الصادرات والواردات من السلع ،اما ميزان التجارة غير المنظورة فيتضمن الصادرات والواردات من الخدمات غير المادية مثل السياحة او مصاريف التامين والنقل مثل قناة السويس.

ويعتبر ميزان العمليات الجارية أهم قسمى ميزان المدفوعات :لانة يتعلق بالصادرات والواردات من السلع والخدمات التى توثر تاثيراً بالغاًعلى مستوى النشاط الاقتصادى فى الدولة .. وتقيد قيمة المتحصلات التى تحصل عليها الدولة من العالم الخارجى: نتيجة لصادراتها اليه من السلع والخدمات فى جانب الدائن من الميزان،اما قيمه المدفوعات التى تدفعها الدولة لهذا العالم نتيجة لواردتها منه فتقيد فى جانب المدين .ويعتبر الميزان فى حالة فائض اذا زادت المتحصلات

من الصادرات ،وعند تساوى الجانبين يكون الميزان متوازنا.

ثانيا : ميزان أو حساب العمليات الراسمالية :

ويتضمن هذا الميزان العمليات المتعلقة بحركات رؤوس الاموال مابين الدول ويفرق عادة فى حركات رؤوس الاموال هذه مابين رؤوس الاموال طويلة الاجل ورؤوس الاموال قصيرة الاجل.ويعتبر راس المال طويل الاجل اذا زاد اجله عن عام .والا اعتبر قصير الاجل.

وبصفة عامة فان القيد فى ميزان المدفوعات يرتبط باتجاه المدفوعات وليس بالاثر القانونى لها.وقد تقوم الدولة بالاقتراض من الخارج ،ويؤدى ذلك الى حصولها على ايرادات نقدية ودخولها فى دائرة الاقتصاد القومى وتقيد قيمة القرض فى جانب الدائن او الايرادات رغم أن الدولة قد اصبحت من الناحية القانونية مدينة بمبلغ القرض.

- **انتقالات رؤوس الأموال :**

و هي تنقسم إلي :

١. قصيرة الأجل :

باخذ انتقال رؤوس الأموال صورا وأشكال متنوعة،كما ان اسبابه ودوافعه متنوعه بدورها

أ-حركات رؤوس الاموال التى تنتقل من دولة إلى اخرى بقصد تسوية العجز او الفائض فى علاقتهم التجارية الخارجية.

ب- تشجيع صادراتها تلجا الدوله الى منح الدول المستورده بعض القروض قصيرة الاجل لتمكينها من الاستيراد منها وبالتالى يزداد حجم التبادل التجارى بينها وبين هذه الدولة.

٢. القروض متوسطة وطويلة الأجل .

ترتبط القروض متوسطة وطويلة الاجل عادة بالمشروعات الاستثمارية ،فتمويل هذه المشروعات يحتاج الى فترة زمنية قبل ان تبدا فى الانتاج وبالتالى توفير القدرة على السداد،ولذلك فانها تحتاج الى انواع من التمويل متوسط وطويل الاجل.

وتعتبر الاستثمارات المباشرة من أهم صور انتقال رءوس الاموال ،وتمثل هذه الاستثمارات حقوق ملكية وبالتالى تتضمن مشاركة فى الادارة والارباح او الخسائر فعندما يقوم شخص بالاستثمار مباشرة فى مشروغ مافى دولة اخرى فانه يتحمل مخاطرة فضلا عن المشاركة فى الادراة ،وبالتالى يكون مالكا وليس دائناً.

٣. المساعدات الاقتصادية للتنمية

عرف النظام الدولى – وخاصة بعد نهاية الحرب العالمية الثانية –المساعدات الاقتصادية للتنمية أذ تقدم بعض الدول الصناعية المتقدمة وبعض المؤسسات منحا واعانات للدول النامية لمساعدتهافى جهودها من اجل التنمية او لمواجهة ظروف خاصة مثل الكوارث الطبيعية ،وبالتالى تختلف من هذه الناحية عن القروض والتسهيلات الائتمانية

تطور النظام الاقتصادى العالمى

- **العولمة globalization**

شهد العالم تطورات سريعه ومتلاحقة ومتعددة الجوانب السياسية والاقتصادية والاجتماعية .. الخ على مدار العقود الماضيه .

ولقد تجسدت هذه التحولات بصفة عامة فى الازالة التدريجية للحدود غير الجغرافية بين الدول والكيانات السياسيه المختلفة.بحيث اصبح يسود الاتجاه نحو توحيد القوانين التى تحكم كثيرا من الانشطة الاقتصادية والاجتماعية، كما خرجت صيحات عالمية تنادى بضرورة نشر الديمقراطية واحترام حقوق الانسان على مستوى دول العالم المختلفة،وهذا فى الوقت الذى اصبح فيه المواطن فى اى دول يشهد ما يحدث فى بقية العالم وهوجالس فى مكانه،وذلك باستخدام الادوات الالكترونية لتغير محطات استقبال البث التلفزيونى.

ولعلنا لا نبالغ اذا قلنا ان انماط الاستهلاك تتقارب على نحو تدريجى بفضل الاعلانات التجارية العابرة للحدود من الوسائل الالكترونيه الحديثة،التى تهيمن عليها الشركات متعددة الجنسيات وهذه التحولات وغيرها تشكل ماأصبح يطبق عليه الان العولمة أى عولمة القوانين والسياسات خاصة فى المجال الاقتصادى وعولمة فى الجانب الاجتماعى والثقافى وهكذا تتداخل وتتشابك الجوانب الاقتصادية والاجتماعية والثقافية والعلمية والتكنولوجيه للعولمة.

فالعولمة اذا وخاصة الاقتصادية منها تعنى ان كل كيان اقتصادى يتكامل ويندمج مع غيره من الكيانات ليتكون من الكل مجموع اقتصادى على مستوى العالم،يخضع للقانون والقواعد ذاتها بغض النظر عن خصوصية هذه الكيانات سواء كانت متقدمة ام متخلفة غنية ام فقيرة ،ولا يفرق بينهما سوى اعطاء مهلة من الوقت لكى تلحق الكيانات الضعيفة بالمجموع.

- **فالعولمة رافقها :**

١. حدوث تحولات عديدة فى هيكل الانتاج العالمى ذاته واصبحت اهم المدخلات تتمثل فى المعلومات والمعرفه واشكال جديدة من المواد الاولية تحل محل المواد التقليدية.
٢. ظهرت ثورات علمية عديدة خاصة فى مجال الزراعة وتجسد هذا فيما يعرف بالهندسة الوراثية او التكنولوجيا الحيوية.
٣. ازدادت حركات رءوس الاموال كثيرا بين الدول لتصبح اضعاف حركة التبادل التجارى ذاته مدفوعة بالتقدم فى وسائل الاتصال من جهة وبدافع المضاربة مستغلة مناخ التحرير فى السياسات والاقتصاد من جهة أخرى.
٤. اذا كانت العولمة تعنى التحرير والتخلص التدريجى من القيود والعقبات، التى كانت تعترض طرق التجارة الدولية فإنها القت بظلالها على الاداء فى الاقتصادات الوطنية ذاتها ،حيث اسهمت فى التحرير داخل الاقتصادات الوطنية Deregulation واستفادت منها كذلك .

- **العولمة فرص تحديات:**

أدت التطورات إلى فرض عديد من التحديات Challenges على الدول الناميةمع منحها العديد من الفرص Opportunities أمام الدول المتقدمة إن استطاعت أن تستفيد منها ،وهو ما يعد تحديا فى الوقت ذاته،يعطيها

فرصة النفاذ إلى اسواق الدول الاخرى إذا ما طورت جهازها الإنتاجى ،وصارت تنتج بتكلفة اقتصادية أفضل من غيرها ،وتنتج ايضا منتجات ذات نوعية جيدة ليكون لها ميزة تنافسية ، الا انها فى الوقت ذاته تتعرض لمنافسة شديدة وغالبا غير متكافئة مع سلع الدول الاخرى خاصة التى تعمل فى ظروف انتاجية أفضل سواء من حيث التكنولوجيا المتطورة ،السياسات الواعية المشجعة على الإنتاج ،وتوافر المهارات الإدارية والعلمية والسوق ... الخ.

موقف مصر وقارة افريقيا من تحديات العولمة :

من التحولات الناتجة عن ظهور العولمة فإن أفضل طريق لمواجهة العولمة وأثارها السلبية الحالية والمحتملة على القارة الأفريقية يتمثل في :

- مزيد من التعاون والتكتل حيث أن ظاهرة التكتلات الدولية والقارية تشكل مؤشر وعي قومي وجماعي عالمي للوقوف ضد تيار العولمة أو التقليل من أثاره السلبية ، وهذا ما أدى إلى اندماج وتعاون اقتصادي بين دول القارة الأفريقية عن طريق الاتحاد الإفريقي والتكتلات الاقتصادية الأفريقية الذي سيكون من شأنه تعظيم قدرة أفريقيا على مواجهة التكتلات الدولية الكبرى والعولمة وسيكون لمصر دورًا عظيمًا من خلال رئاستها للاتحاد الإفريقي بما لها من رؤي نحو تحقيق التنمية المستدامة وتطوير الاقتصاد المصري بما يعود بالفائدة علي الاقتصاد الافريقي في مواجهة التحديات .

ويمكن تطوير اقتصاد الدول النامية ومنها الدول الفريقية لمواجهة العولمة من خلال ما يلي:

- اتجاه القارة نحو تصنيع منتجاتها بدلاً من تصديرها خاماً.
- إتباع الأساليب العلمية الحديثة في الزراعة والرعي واستغلال الغابات وتحقيق الاكتفاء الذاتي من الغذاء
- توفير رأس المال اللازم للصناعة ونجحت دول القارة في تأسيس بنك الإتحاد الإفريقي ليسهم في قيام الصناعات الكبرى بالقارة.
- حل مشكلة الديون الإفريقية عن طريق إسقاط الدول الكبرى بعض ديونها وإعطاء فترة سماح لسدادها.
- تكوين سوق إفريقية مشتركة على غرار الإتحاد الأوروبي.
- هناك العديد من الفرص الجديدة لأفريقيا في عصر المعلومات، ومع ذلك فحتى تستطيع جني فوائد الاقتصاد المعرفي، لابد من اتخاذ عدد من الخطط الإستراتيجية على كافة المستويات. إن أفضل طريقة لمواجهة التحديات التي تواجه أفريقيا في ظل العولمة والاقتصاد المعرفي هي التخطيط الاستراتيجي والتنفيذ بحيث يشمل القطاعين العام والخاص، ومشاركة القطاع التطوعي والشركاء على الصعيد الوطني والإقليمي والعالمي.
- ويجب على الحكومات الأفريقية أن توفر بيئة مواتية لتعزيز نمو التكنولوجيا والصناعات التكنولوجية ذات الصلة. كما يجب أن يتم صياغة سياسات وطنية مصممة خصيصاً لتلبية أهداف محددة بوضوح، استناداً إلى الواقع المحلي والقيود والاحتياجات.
- ويتعين على الحكومات الأفريقية التركيز على سياسات التعليم، حيث أن العلم والتكنولوجيا هما حجرا الزاوية في تحقيق التقدم الاقتصادي الذي تحتاج إليه أفريقيا لتعزيز قدرتها التنافسية في القرن الحادي والعشرين. إن صناعة المعلومات والابتكار هما القوة الدافعة للنمو والتنمية. ويجب أن تجمع أفريقيا علمائها في مراكز

الخبرات الإقليمية، وأن تعمل هذه المراكز في مجال البحث والتطوير وتصميم التكنولوجيا الملائمة للواقع المحلي. ويمكن للحكومات تحسين القدرات التكنولوجية الوطنية من خلال إنشاء مؤسسات معرفية تقدم خدمات إرشادية واسعة النطاق، مما يؤدي إلى توفير بيئة مواتية لبناء الاقتصاد المعرفي في أفريقيا.

وإذا كانت العولمة تفتح افاقا واسعة للقادمين الجدد إلى سوق الانتاج والاستهلاك للاستفادة مما يتوافر لدى السابقين من مزايا تكنولوجية وعملية..إلخ إلا انه فى الواقع جاء اتفاق الجوانب التجارية لحماية حقوق الملكية الفكرية "التربس"ليجعل الأمر أكثر صعوبة من حيث إطالة مدة الحماية وتوسيع نطاقها لتشمل المنتجات،وليس فقط وسائل الإنتاج،ولفرض عقوبات اقتصاديه شديدة على مخالفة هذه الإحكام وغيرها.

- **ومن هنا يمكن القول إن الدول الساعية للتقدم عليها أن:**

١. تعنى بتنمية مواردها البشرية أى تعنى بالتعليم ومكوناتة المختلفة،مع التركيز على عنصر الجودة التعليمية.
٢. تعنى بالبحث العلمى والتطوير.
٣. تعنى بتطوير انتاجها كما ونوعا ورفع مستوى الكفاءة لديها.
٤. تعنى بخلق طلب متميز لدى القطاعين العام والخاص على المنتج التعليمى المتميز من جهة ونتائج البحث العلمى والتطوير من جهة اخرى.
٥. تعنى الدول النامية بخلق تكامل اقتصادى فيما بينها،والأحرى بذلك الدول العربية.
٦. وعلى مستوى الافراد يجب عليهم ان يتقنوا عديدا من المهارات المهنية واللوجستية ، التى تؤهلهم للحصول على فرص عمل سواء فى الداخل أو فى الخارج،وبما ينعكس على مستوى إنتاجيتهم.

- **القوى الاقتصادية الرئيسة فى العالم المعاصر**

انقسم العالم فى بداية هذه الألفية الثالثة إلى شمال متقدم وجنوب متخلف،فالدول فى الجزء الشمالى من الكرة الأرضية مثل : اليابان وأوروبا والولايات المتحدة الامريكية وكندا تتميز بتطور هياكلها الاقتصادى وتحقق معدلات مرتفعة للنمو ،وتوفر دخولاً مرتفعة لمواطنيها ، اما الدول التى تقع – فى الغالب فى الجزء الجنوبى من الكرة الارضية فى شرق ووسط وجنوب اسيا وقارة افريقيا وقارة امريكا اللاتينية "مع بعض الاستثناءات مثل دول النمور الاسيوية وجنوب افريقيا والصين وبعض الدول العربية البترولية".

فإنها تعانى من التخلف النسبى لهياكل اقتصاداتها وتنمو بمعدلات محدودة ، ولا توفر إلا مستويات منخفضة من الدخول لمواطنيها.

ويحذر تقرير التنميه فى "عام ٢٠٠٣" الذى يصدره البنك الدولى من أنه رغم الانخفاض الطفيف للنسبة المئوية للسكان الذين يعشيون فى فقر مدقع "أى الذين يعيشون على أقل من دولار واحد فى اليوم" إلا أن عددهم بلغ ١,٢مليار نسمة فى نهاية القرن العشرين بنسبة ٢٠٪من اجمالى سكان العالم البالغ حوالى ٦ مليارات نسمة،كذلك ترتفع نسبة الفقراء الذين يعيشون على أقل من دولارين فى اليوم الواحد إلى ٥٠٪ تقريبا من اجمالى سكان العالم "أى حوالى ٣ مليار نسمة" ومن الناحية الأخرى اتسعت ظاهرة عدم المساواة فى توزيع الدخول على مستوى العالم ، بل تضاعف فى الاربعين سنة الاخيرة الفارق بين متوسط الدخل فى أغنى ٢٠ دولة أفقر ٢٠ دولة ،وبحيث وصل متوسط الدخول الآن فى هذه الدول

ألاغنى حوال ٣٧ مثل متوسط الدخول فى الدول الافقر.

جدول (١)، عدد السكان و الدخل القومي و التجارة الدولية للسلع فيمجموعة الدول السبع (عام ٢٠٠٣)

الدول	السكان (مليون نسمة)	الدخل القومي الاجمالي (بليون دولار)	دخل الفردسنويا (دولار)	الصادرات (بليون دولار)	الواردات (بليون دولار)
الولايات المتحدة الاميريكية	٢٩١	١٠٩٤٦	٣٧٦١٠	٧٢٤	١٣٠٦
اليابان	١٢٧,٢	٤٣٩٠	٣٤٥١٠	٤٧٢	٣٨٣
ألمانيا	٨٢,٦	٢٠٨٥	٢٥٢٥٠	٧٤٨	٤٩٤
المملكة المتحدة	٥٩,٣	١٦٨٠	٢٨٣٥٠	٣٠٤	٣٨٨
فرنسا	٥٩,٧	١٥٢٣	٢٤٧٧٠	٣٨٥	٣٨٨
ايطاليا	٥٧,٦	١٢٤٣	٢١٥٦٠	٢٩٠	٢٨٩
كندا	٣١,٦	٧٥٧	٢٣٩٣٠	٢٧٢	٢٤٦
الاجمالي	٧٠٩	٢٢٦٢٤	٣١٩١٠	٣١٥٩	٣٤٩٤
النسبة الي اجمالي العالم	٪١١,٣	٪٦٥,٦		٪٤٢,٧	٪٤٥,٨

و يتضح من جدول (١) ما يلي :-

١. الدول ذات الدخل الاكبر علي مستوي العالم و هم علي الترتيب

الولايات المتحدة الاميريكية ، اليابان ، ألمانيا ، المملكة المتحدة ، فرنسا ، ايطاليا، كندا.

٢. يتراوح دخل الفرد سنويا في هذه الدول ما بين ٣٧٦١٠ دولاركأعلي دخل في الولايات المتحدة الاميريكية الي ٢١٥٦٠ دولار كأدني دخل في ايطاليا .

٣. تمثل هذه الدول فيما بينها "مجموعه السبعة" و التي تجتمع بشكل دوري للتنسيق فيما بينها بخصوص موقفها من كل ما يجري في العالم بإعتبارها المحتكرة لقرابه ثلثي دخل العالم بأسره ، و اقل قليلا من نصف حجم تجارة العالم في السلع

يبلغ متوسط دخل الفرد في مصر حوالي ١٣٩٠ دولار سنويا إلا إنه نظرا لاختلاف مستويات الاسعار بين الدول المختلفة، فإنه بحساب القوة الشرائية الحقيقة للدخل في مصر يرتفع متوسط دخل الفرد الحقيقي الي ٣٤٩٠ دولارا للفرد سنويا

دور مصر الاقتصادي في أفريقيا حاليا لمواجهة تحديات العولمة :

تحرص مصر على إعادة ترتيب أولويات سياستها الخارجية، بما يعيد التوازن في علاقاتها التي كانت سائدة على صعيد كثير من القضايا والملفات، وفي مقدمتها العلاقات المصرية – الأفريقية، التي أتاح غياب مصر عنها لقوى أخرى فرصة التسلل إليها، وتهديد مصالحها بها.

وتتمثل الأهداف الإستراتيجية في استعادة الدور الاقتصادي لمصر في أفريقيا وذلك من خلال:-

أ- زيادة حجم التبادل التجاري بين مصر والدول الأفريقية

ب- زيادة حجم الاستثمارات المصرية في أفريقيا

ويمكن صياغة الإستراتيجية على النحو التالي: "تهدف مصر إلى استعادة دورها الاقتصادي في أفريقيا من خلال زيادة حجم التبادل التجاري مع الدول الأفريقية وزيادة حجم الاستثمارات المصرية في أفريقيا استنادا إلى إقامة علاقات ثنائية قوية مع الدول الأفريقية والاستفادة من إنشاء منطقة التجارة الحرة مع التكتلات الاقتصادية الأفريقية تمهيدا لتحقيق التكامل وفقا للتخصص في الميزة النسبية فيما تملكه كل دولة من الدول الأفريقية، والتركيز على الفرص الاستثمارية الأكثر جذبا في أفريقيا والمتمثلة في قطاع الاتصالات وقطاع البنية التحتية وقطاع النقل وقطاع الخدمات ومنها الخدمات المالية".

مدي غني افريقيا بالموارد الطبيعية :

تعتبر أفريقيا من أغنى قارات العالم في الموارد الطبيعية مما يجعلها مصدرا هاما للموارد الأساسية التي تحتاج إليها الدول لتوفير احتياجات سكانها من المواد الاستهلاكية أو المواد الخام اللازمة لعمليات التصنيع والتي يمكن الحصول عليها بأسعار مناسبة . إن القارة الأفريقية غنية بثرواتها فهي تحمل فوق سطحها وتحته ثروات وإمكانيات طبيعية وبشرية حيث تضم نحو ٢٦% من الأرض الصالحة للزراعة في العالم، ١٨% من مساحة الغابات، و ١٣% من المزارعين في العالم، وعلى الرغم من هذه الإمكانيات الزراعية ووجود اليد العاملة لكن إنتاجها الزراعي لا يتعدى ٥،٤% من الإنتاج العالمي . كما إن القارة غنية بثرواتها المعدنية فهي تنتج أكثر من نصف إنتاج العالم من الذهب وخمس إنتاجه من البلاتين، ومعظم إنتاجه من الماس وتحتوي على ٩٠% من الاحتياطي العالمي من الكروم وتنتج منه سنويا نحو ثلث الإنتاج العالمي .إلا أنها تعاني من نقص في الوقود ولكن يعوض ذلك إمكانيات ضخمة من القوى المائية تقدر بنحو ٢٣،١% من إمكانيات العالم . وتنتج أفريقيا من الفحم ما يقارب ٣% من إنتاج العالم، ويشكل الاحتياطي الإفريقي من الغاز الطبيعي نحو ١٠% من الاحتياطي العالمي، بينما يصل الاحتياطي من البترول نحو ١٥% من الاحتياطي العالمي .

مستقبل مصر الاقتصادي من خلال افريقيا :

تمثل القارة الأفريقية عمقا استراتيجيا لمصر لعوامل كثيرة منها العوامل الجغرافية والسياسية والتاريخية، كما تعد القارة الأفريقية سوقا ضخما ذا كثافة سكانية عالية تصل إلى ١،٢ مليار نسمة ولهذا فهي تعتبر منفذا مهما للصادرات المصرية حيث تؤكد المؤشرات الاقتصادية إمكانية مضاعفة معدلات التصدير المصرية كما ونوعا للسوق الأفريقية. وتعتبر الدول الأفريقية بشكل عام مصدرا للدعم السياسي في المحافل الدولية بالنسبة للقضايا التي تهم مصر على الصعيد العالمي. إضافة للأهمية الإستراتيجية التقليدية للقارة ككل بالنسبة لمصر إلا إن منطقة حوض النيل تحتل المكانة الإستراتيجية الأكثر أهمية لارتباطها بنهر النيل ذلك الشريان الذي تعتمد عليه مصر في توفير ٩٨% من احتياجاتها المائية.

ترتبط مصر مع الدول الأفريقية بمجموعة من الاتفاقات لتيسير التجارة والاستثمار على المستوى الثنائي و الاقليمى. فعلى المستوى الثنائي وقعت مصر مجموعة من الاتفاقات الثنائية مع العديد من الدول الأفريقية شملت: اتفاقيات لتيسير التجارة البينية، اتفاقيات لتشجيع وحماية الاستثمار، اتفاقيات للتعاون الفني، اتفاقيات لمنع الازدواج الضريبي. وعلى المستوى الاقليمى فان مصر تشارك في تجمع الكوميسا، اتفاقية أغادير، تجمع الساحل والصحراء، النيباد. كما قامت مصر بتوقيع اتفاقية التجارة الحرة مع التجمعات الثلاث السادك، الكوميسا، الاياك.

وضع الاقتصاد المعرفي ومستوي التقدم التكنولوجي في أفريقيا حاليا :

- لقد أصبح اقتصاد المعرفة ضرورة اقتصادية وتنموية بشكل عام، بل وضرورة مؤكدة للتعامل مع الاقتصادات العالمية. وتعد أفريقيا لاعباً محدود الدور في الاقتصاد المعرفي العالمي، حيث إن هناك فجوة كبيرة بين مؤشرات الاقتصاد المعرفي في أفريقيا وبقية دول العالم؛ فإن نصيب أفريقيا من الاقتصاد المعرفي العالمي محدود، وهنك عدد من الدول الافريقية التي حققت تقدما في هذ المجال مثل جنوب افريقي وموريشيوس وسيشل والمغرب.
- تحاول أفريقيا الدخول إلي مجال التنمية التكنولوجية والعلمية والابتكارات، ولكن المؤشرات تدل على وضع محدود لأدائها في هذا المجال.

مؤشرات عن الاقتصاد المعرفي في أفريقيا

- يشير الاتجاه العالمي إلى أن خدمات تكنولوجيا الاتصالات تنمو بمعدل سريع، تليها منتجات برامج الكمبيوتر .
- في معظم دول القارة يظل القطاع العام أكثر مستخدم لتكنولوجيا الاتصالات والمعلومات. وباستثناء دولة جنوب أفريقيا فإن قطاع الصناعة والقطاع المالي أكثر مستهلكين لتكنولوجيا الاتصالات.
- تعد جنوب أفريقيا أكبر سوق لتكنولوجيا الاتصالات والمعلومات في القارة، تليها دول الشمال الأفريقي.
- يكمن الأمل في إدراك الحكومات الأفريقية لضرورة وضع السياسات التي يمكن أن تساعد في التغلب على بطء الاتصال بالاقتصاد المعرفي العالمي.
- تقوم حكومات أفريقية عديدة حاليا بصياغة السياسات الوطنية لتكنولوجيا المعلومات، وتطوير الشراكات الإقليمية؛ وذلك لتمكين المناخ الاقتصادي، وسياسات التحرير الناشئة في القارة.
- هناك عدداً من الفرص تنتظر أفريقيا، وقد يحالفها الحظ وتتبع الاتجاه العالمي، كما أن هناك عدداً من التحديات وأوجه القصور التي تواجه القارة.
- وقد يمثل ذلك دافعاً لها للوصول إلى مستقبل أفضل، ويُذكِّر صانعي القرار بأن هناك الكثير من الأمور التي لا بد من الاهتمام بها والتركيز عليها .

اسئلة الفصل السادس

قارن بين :

١- العلاقات الاقتصاديه الداخليه و الخارجية .

٢- ميزان التجارة المنظورة و غير المنظورة .

١. **بم تفسر......؟**

١. تمثل الاستثمارات المباشرة اهم صور انتقالات رءوس الاموال.

٢. سوء توزيع الدخل علي مستوي العالم .

٣. اختلاف رءوس الاموال علي حسب دوافعها .

" لقد اصبح مفهوم العولمة خاصة في مجال الاقتصاد من المفاهيم التي تسود العالم بأسره ، و قد صاحب ظهور هذا المفهوم عدة متغيرات في هياكل الانتاج العالمي ، كما فرضت تلك المتغيرات تحديات او متطلبات ينبغي أن تهتم بها الدول خاصة النامية.

في ضوء الفقرة السابقة صنف العبارات التالية الي :

أ- عبارات تمثل متغيرات مصاحبة لعملية العولمة .

ب- عبارات تمثل متطلبات ينبغي الوفاء بها لمواكبة العولمة .

١-تطوير التعليم ينبغي ان يتجه نحو الكم والكيف

٢-لابد من تحقيق التكامل بين اقتصاديات الدولة سواء على المستوى الثنائى أو الجماعى.

٣-لقد حدث العديد من التحويلات فى هياكل الانتاج.

٤-لقد زادت حركة رؤوس الأموال بين الاسواق المختلفة.

٥-تتعرض السلع المنتجة محليا إلى المنافسة الشديدة من السلع المستوردة.

٦-هناك ثورة فى مجال الأنتاج الزراعى والصناعى

٧-هناك منافسة شديدة على مستوى الأفراد والمجتمعات فى مجال التعليم والعمل والانتاج.

المواصفات الفنيـــة:

رقـــم الكتـــاب:	٢٧/٣/٣٣/٣/٢٠/٤٨١
مقـــاس الكتـــاب:	$\frac{١}{٨}$ (٥٧ × ٨٢) سم
طبـــع المتـــن:	٤ لون + ١ لون
طبـــع الغـــلاف:	٤ ألوان
ورق المتـــن:	٧٠ جم أبيض
ورق الغـــلاف:	١٨٠ جم كوشيه
عدد الصفحات بالغلاف:	١٩٢ صفحة

http://elearning.moe.gov.eg

الأشراف برنتنج هاوس

بسم الله الرحمن الرحيم

قام بفهرسة هذه النسخة ورفعها :

د محمد أحمد محمد عاصم

نسألكم الدعاء